



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

DISEÑO | UC
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Diseño

EL SENDERO DEL HECHICERO

Un videojuego de aprendizaje tangencial matemático

> Autor

Pamela Alejandra Vilches Ivelic

> Profesor Guía

Alejandro Durán

Tesis presentada a la Escuela de Diseño de la
Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al
título profesional de Diseñador.

Octubre 2020
Santiago, Chile

EL SENDERO DEL HECHICERO

Un videojuego de aprendizaje tangencial matemático

*"If people do not believe that mathematics is simple, it is only
because they do not realize how complicated life is."*

– John von Neumann

> índice

> 01 aprendizaje	6
Aprendizaje Matemático	7
Aprendizaje de Fracciones	10
> 02 juegos y matemáticas	13
Lo lúdico en el aprendizaje	14
> 03 videojuegos	16
Los videojuegos	17
Los videojuegos educativos	19
Tipologías de Videojuegos	21
Videojuegos de Ritmo	23
Videojuego Matematico	25
> 04 música y ritmo	26
> 05 la oportunidad	28
> 06 formulación	30
Qué, Por Qué, Para Qué	31
Objetivos Específicos	31
> 07 los jugadores	32
Enseñanza Aritmetica Escolar	33
Niños y Videojuegos	34
La Aprensión de los Padres	35
> 08 metodología proyectual	36
> 09 el sendero del hechicero	38
Fracciones como medida	39
Juego de Ritmo y Plataforma	40
La esencia del gameplay	41
CS50's Introduction to Game Development	43
Prototipo 1: Los Cimientos	45

> índice

Prototipo 2: Inputs	47
Prototipo 3: Generación Procedural de Niveles	48
Prototipo 4: Ritmo y Parametrización	49
Prototipo 5: La Narrativa y Sprites	50
Prototipo 6: Músicalización del juego	55
Prototipo 7: Parallax y Animaciones	58
Prototipo 8: Niveles	59
Prototipo 9: Testeo	61
Prototipo 10: Tutorial y mejoras	65
Prototipo Beta	67
> 10 difusión y proyección	69
Paper Académico	70
Difusión en entidades académicas	70
Publicación Open Source Github	70
Publicación App Store y Google Play	71
> 11 conclusión	72
> 12 referencias	74

> 01 aprendizaje

> aprendizaje matemático

Las matemáticas son una parte esencial de nuestra vida cotidiana. Estas surgen a partir de la necesidad del ser humano de interactuar con su entorno: las operaciones aritméticas no son otra cosa que el deseo de cuantificar los objetos que nos rodean, mientras que la geometría euclidiana es simplemente una forma de representar el espacio tridimensional en que vivimos. Teniendo esto en mente, resulta evidente la importancia que tiene el conocimiento matemático para el ser humano en su totalidad, ya que la matemática es sencillamente una forma de abordar los problemas y asuntos del mundo en que vivimos (Devlin 2011).

Sin embargo, hoy en día existe una actitud de rechazo y desconocimiento de las matemáticas, “85% de los estudiantes universitarios en un curso introductorio de matemáticas declaran haber experimentado ansiedad al presentárseles problemas matemáticos” (Furner, 2016, p. 4). A partir de esto se acuña incluso el término Fobia Matemática, el cual se define como “temor inconcebible a las matemáticas que puede interferir con la manipulación de números y resolución de problemas en una variedad de situaciones cotidianas y académicas” (Buckley & Ribordy, 1982, p. 1). A partir de esta premisa, cabe preguntarnos ¿por qué si esta disciplina está relacionada de manera tan intrínseca con la vida cotidiana, existe tal rechazo y desconocimiento de ella en una buena parte de la población?

Las matemáticas tal y como se enseñan hoy en día tienen su origen en el famoso libro Elementos, escrito por el matemático Euclides (300 a. C.), el cual recopila gran parte del conocimiento matemático que se tenía hasta la época y lo transforma a la palabra escrita, pero aun así las matemáticas continuaron siendo

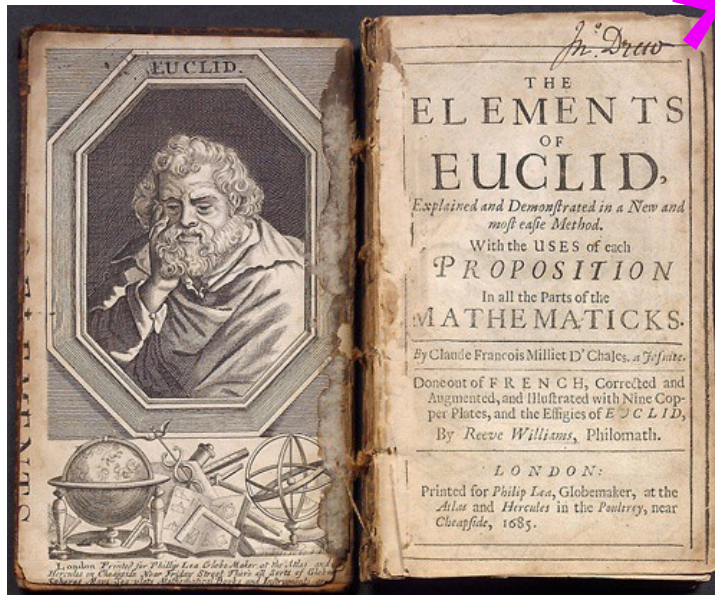


Imagen 0. Elementos (Euclid, 300 a.C.).

un sujeto que solo unos pocos manejaban y practicaban. Pasaron centenas de años hasta que en 1202 se democratizaron e hicieron accesibles a todas las personas, gracias al libro Liber Abaci de Leonardo de Pisa (1202), mejor conocido como Fibonacci, en el cual describe y explica cómo realizar cálculos matemáticos de manera simbólica. Estos métodos introducidos por Fibonacci son básicamente los mismos que se utilizan en los textos escolares actuales (Devlin, 2011). Lo interesante de todo esto es que Fibonacci decidió explicar las matemáticas de esta forma dado que esta era la única que se encontraba a su disposición en esa época y que le permitía que su conocimiento trascendiera sus límites espacio temporales. Sin embargo, gracias a los múltiples avances tecnológicos, la realidad de nuestros tiempos es radicalmente distinta a la del siglo XIII, y por lo mismo, se esperaría que el método de enseñanza, en la medida de lo posible, se adecuase al contexto actual.

En el año 1996 Terezinha Nunes y Peter Bryant realizaron un experimento en los mercados de Recife, Brazil. La experiencia consistía en acercarse a los niños (entre 8 y 14 años) que trabajaban ayudando a sus padres en los locales del mercado para

realizar transacciones con ellos y con esto poner a prueba su habilidad para realizar operaciones matemáticas mentalmente en un contexto cotidiano, para luego contrastarla con su habilidad para realizar estas mismas operaciones en un contexto de prueba escolar escrita. Los resultados obtenidos hablan por sí solos: en el contexto de los mercados los niños tuvieron un desempeño casi impecable, 98% de las respuestas correctas, mientras que al plantearles las mismas preguntas en su forma simbólica en una prueba, el desempeño cayó drásticamente a un 37%.

En una investigación de la enseñanza matemática de la Universidad de Santiago de Chile, se constató que las escuelas muchas veces inhiben, sin quererlo, las potencialidades matemáticas que tienen los niños.

En la mayoría de las clases observadas se gestiona una enseñanza de las matemáticas alejada de sus sentidos y significados originarios; se clasifica los problemas de forma rígida y estandarizada y, con ello, se limita –en muchos casos se impide– la posibilidad de que los estudiantes exploren auténticamente posibles caminos de abordaje y solución. Se trata de una enseñanza relativamente arbitraria, que presenta

los conocimientos matemáticos a los estudiantes a propósito de razones formales y no como respuesta a una necesidad (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011, p.122).

Como bien explica el matemático y profesor de la Universidad de Stanford Keith Devlin (2011) en su libro *Mathematics Education for a New Era*, la motivación es un factor crucial en el proceso del aprendizaje, por lo que para un aprendizaje óptimo, los problemas matemáticos deben surgir naturalmente del contexto en donde están siendo aprendidos y quien los aprende debe tener alguna motivación en ese contexto para llevarlos cabo. De hecho, ese es precisamente el fin de los clásicos ejercicios de problemas matemáticos frecuentemente utilizados en las salas de clases. En ellos se plantea con palabras una situación de la vida cotidiana que involucra el uso de operaciones matemáticas. Sin embargo esta forma de enunciar ejercicios queda corta con la idea de motivación propuesta por Devlin, dado que difícilmente un niño podrá comprometerse y sentirse involucrado en un problema tan ajeno a él, que simplemente está leyendo.

Con todo esto, quedan en evidencia dos puntos fundamentales: la necesidad de un mayor grado de inmersión en la enseñanza matemática para motivar el aprendizaje, junto con una promulgación del pensamiento matemático, que trascienda dichas matemáticas simbólicas que muchas veces ocultan a los niños el verdadero fin que tiene esta disciplina en la vida cotidiana. Con esto en mente, al pensar en potenciales temas críticos en la enseñanza matemática, hay uno que salta a la vista a partir del gran estudio que existe respecto a la dificultad de su aprendizaje: las fracciones. A continuación se revisan algunos antecedentes relevantes de este sujeto.

> aprendizaje de fracciones

Como dice el chiste “3 de cada 2 personas tienen problemas con las fracciones”.

Las fracciones existen desde tiempos de antaño, desde las antiguas civilizaciones, sin embargo, hasta el día de hoy, siguen provocando grandes problemas durante el aprendizaje matemático (Gabriel et al., 2013). Está bien documentado que las fracciones se encuentran entre los conceptos más complejos que los niños enfrentan en su educación primaria (Boulet, 1998; Davis et al., 1993). También se ha establecido que aprender fracciones es uno de los obstáculos más serios en la maduración matemática infantil (Behr et al., 1993).

Para entender entonces el problema existente en el aprendizaje de fracciones, es importante primero comprender cómo se entiende este concepto desde un punto de vista pedagógico. En este sentido, un referente importante en el área es Kieren, quien en 1988 propone un modelo en donde concentra los 5 posibles significados o formas de entender una fracción. A continuación se enuncian estos 5 significados de acuerdo a lo explicado por Peña y Rojas en el 2014:

> Fracción como parte-todo o partes de una unidad: considera la fracción a/b como la relación que existe entre un todo “b”, continuo o discreto, dividido en partes alícuotas (son capaces de medir exactamente a su todo), y una parte “a”, que indica un cierto número de partes alícuotas del todo.

> Fracción como división o cociente: la fracción a/b es el resultado de una situación de reparto, donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir “a” unidades, en “b” partes iguales.

> **Fracción como resultado de una medida:** se relaciona con su origen histórico correspondiente a expresar una medida tal, que no se puede cuantificar con una cantidad entera de unidades de medida. En este caso, la unidad de medida se ha dividido en "b" subunidades iguales, y se ha repetido "a" veces para completar la medida deseada. Por lo tanto a/b representa "a" veces $1/b$.

> **Fracción como operador:** la fracción es un objeto que modifica un valor multiplicándolo por "a" y dividiéndolo por "b", en que a y b son números enteros positivos.

> **Fracción como razón:** la fracción a/b indica una comparación entre dos cantidades a y b, citadas en el mismo orden en que han sido comparadas. (p.198)

En un estudio realizado el año 2006 por Charalambous y Pita-Pantazi, se contrastó que los estudiantes tenían los mejores resultados en tareas relacionadas con el significado parte-todo de las fracciones y los peores resultados en tareas relacionadas al subconstructo de fracción como medida. Respecto a esto, los investigadores señalaron que:

El subconstructo parte-todo de las fracciones trasciende el

currículum de las matemáticas elementales: es el subconstructo que los estudiantes encuentran más frecuentemente en sus libros de matemáticas. Por el contrario, las otras nociones se introducen principalmente en los cursos más altos de las escuelas elementales, y no son tan enfatizados como la personalidad parte-todo de las fracciones. Por lo tanto parece razonable afirmar que las diferencias en los resultados de los estudiantes en tareas de los 5 significados de las fracciones refleja el énfasis que se les pone a esta durante su instrucción. (p.309)

Por lo tanto, queda en evidencia el déficit existente en la educación de fracciones centrada en los 4 significados fuera del parte-todo, y en particular el de fracción como medida.

Además de esto, otra dificultad observada en el aprendizaje de fracciones en niños de educación primaria son las fracciones impropias o mayores a 1 (Bright et al., 1988; Tzur, 1999). La principal dificultad aparece cuando se les pide a los alumnos representar gráficamente una fracción impropia o cuando una fracción impropia se presenta en una tarea de ordenar números (Gabriel et al., 2013). Cuando se les pide a los alumnos situar el número

1 en una secuencia de números que involucra fracciones, el error más común es situarlo al final de la secuencia, incluso cuando hay fracciones impropias presentes. Aquello podría significar que hay niños que simplemente no pueden imaginar fracciones mayores a 1. Esto es consistente con los resultados levantados por Kallai y Tzelgov (2009) quienes demostraron que los adultos tienen una representación mental de lo que ellos llamaron una “fracción generalizada”. Una fracción generalizada corresponde a una “entidad menor a uno”, emergente de la notación común de una fracción (Kallai y Tzelgov, 2009).

Ambos problemas observados en el aprendizaje de fracciones parecieran estar relacionados ya que la noción de fracción como parte-todo, que es, como ya vimos, la más incorporada en el imaginario común de las personas, puede generar precisamente la falsa percepción de que las fracciones son siempre menores o iguales a 1. Existe entonces aquí una oportunidad de intervención para caminar hacia la rectificación de estos dos problemas que van de la mano.

> 02

juegos y matemáticas

> lo lúdico en el aprendizaje

La búsqueda de motivación en la enseñanza matemática no es una novedad. Hace años que los profesores se valen de distintos medios para complementar y motivar a los alumnos en clases. La película de Disney y Luske (1959), Donald in Mathmagic Land es un ejemplo de estos medios, en donde el carismático pato recorre un mundo matemático en el cual se van ejemplificando conceptos como ángulos y proporciones de manera lúdica (imagen 1), otorgándoles incluso un carácter mágico a las matemáticas para motivar el interés de los niños. Otro caso emblemático es el libro del escritor y matemático brasileño Julio César de Mello y Souza (1938), El hombre que calculaba. En él se relatan las vivencias de un hombre de gran talento para los cálculos, mediante el cual resuelve los problemas con los que se va encontrando, siempre obteniendo resultados intrigantes e interesantes. Ambos recursos fueron creados con la intención de entretener y al mismo tiempo motivar a las personas con la disciplina, y si bien son un buen precedente, la interacción que estos proponen es de carácter pasivo, por lo que solo funcionan como agente motivador y no así de transmisión de conocimiento.



Imagen 1. Donald in Mathmagic Land (Disney y Luske, 1959).

En esta línea se encuentran los juegos matemáticos utilizados al interior de la sala de clases, que buscan poner en práctica de manera lúdica los conocimientos aprendidos. En uno de sus artículos el profesor Lawrence Gross (1984) explica su idea de un juego de bingo para ser utilizado en el contexto de una clase, en él el profesor debe simplemente enunciar los números del bingo como una operación aritmética. La idea de esto según Gross es que sea una instancia divertida y emocionante que despierte el entusiasmo de los alumnos y que ayude a motivar a los desmotivados. Todo esto se complementa con lo que señala Paul Ernest (1986), en donde

además de ejemplificar distintos juegos de carácter educativo para el aula, afirma que “la mayor ventaja de introducir juegos a la sala de clases es que los alumnos se vuelven extremadamente motivados, se involucran en la actividad y en el largo plazo mejoran su actitud hacia la disciplina”.

En síntesis el aprender jugando resulta una gran herramienta para acercarse a la motivación intrínseca que se busca generar en los niños al enseñarles matemáticas. Tomando esto, junto con la era digital en que nos encontramos, el siguiente paso lógico de los elementos lúdicos que complementan el aprendizaje matemático es, sin duda, el mundo de los populares videojuegos. Estos poseen un gran potencial en el contexto de la pedagogía, ya que muchos de los elementos propios de un buen videojuego, son justamente elementos característicos de la educación (Gee, 2003). A continuación se examina en detalle este sujeto.

> 03

videojuegos

> los videojuegos

Los videojuegos son una modalidad de juego que se lleva a cabo específicamente en plataformas electrónicas como el computador, consolas o incluso smartphones. En ellos, el jugador se sumerge en un mundo alternativo con un set de reglas específico para llevar a cabo una misión u objetivo. Este contexto de inmersión resulta extremadamente atractivo para el mundo de la enseñanza, ya que como se describió anteriormente, los problemas deben surgir del contexto mismo para lograr mantener motivado al estudiante. En su libro *Playful Design*, John Ferrara (2012) explica el atractivo de los videojuegos:

Cuando nos sentamos a jugar un videojuego, dedicamos por completo nuestra mente a sobrepasar un difícil desafío. Aprendemos y adquirimos muy rápidamente nuevas habilidades. Aplicamos pensamiento estratégico, ejercitamos la creatividad, y buscamos las soluciones más eficientes a problemas. (...) Disfrutamos y luego, cuando la experiencia se acaba, reflexionamos profundamente en ella (p.12).

Es fácil entonces entender el potencial que tienen los videojuegos en el contexto de aprendizaje, ya que por naturaleza al jugar todos nuestros sentidos se configuran para aprender y resolver problemas, más aún cuando nos familiarizamos con las observaciones que hace James Paul Gee (2003) en su libro *What Video Games Have To Teach Us About Learning And Literacy*, en donde enuncia 36 principios de un buen videojuego que son compartidos por la enseñanza. A continuación se citan los principios número 11 y 12 de Gee a modo de ejemplo:

Principio de Logro: para usuarios de todos los niveles de habi-

lidad existen recompensas intrínsecas desde el principio, personalizadas para el nivel, esfuerzo y habilidad de cada usuario, señalando con esto sus continuos logros (p.67).

Principio de Práctica: los usuarios obtienen muchísima práctica, en un contexto en donde la práctica no es aburrida (en un mundo virtual atractivo a los usuarios, en donde experimentan éxito continuamente). Pasan mucho tiempo en una tarea (p.71).

Todo esto resulta muy coherente con la experiencia ideal de aprendizaje, especialmente en el caso de la matemática, ya que se considera como una disciplina extremadamente práctica que trasciende el simple conocimiento de datos e información, siendo más bien una forma de procesar la información del entorno que nos rodea. No se mide el conocimiento matemático por cuánto alguien puede llegar a saber de él, sino que por cuánto puede llevarlo a la práctica (Devlin, 2011).

Ahora bien, los videojuegos educativos no son una idea nueva. De hecho, hace decenas de años que los desarrolladores vienen probando su suerte en el diseño de juegos que enseñen a los niños conceptos de diversas áreas del conocimiento. Sin embargo, el problema está en qué tan bien han sabido cumplir estos con el carácter lúdico que debiese tener asociado un videojuego educativo.

> los videojuegos educativos

Los juegos deben ser juegos en primer lugar. Este punto puede sonar bastante obvio, pero al mismo tiempo puede ser muy fácilmente ignorado. E ignorarlo es muchas veces la ruina de un diseño bien intencionado. Puedes diseñar juegos para enseñar y persuadir, pero si tales objetivos del mundo real sobrepasan una jugabilidad significativa, ellos socavarán tus oportunidades de éxito. Primero y antes que todo, un juego debe ser disfrutado (Ferrara, 2012, p.50).

el_sendero_del_hechicero

Estas palabras de John Ferrara resumen el principal problema de los videojuegos educativos que existen en la actualidad. Estos en general tienen mucho de educativo y muy poco de juego, lo cual es la principal causa de que este género en particular se haya ganado una mala reputación en el rubro. El propósito de enseñar en ellos resulta demasiado evidente, lo que no significa que este fin educativo debiese encontrarse oculto en el juego, sino que más bien la enseñanza debería emanar de manera orgánica y natural en el mundo representado en él. Un ejemplo claro de este problema es el videojuego Math Blaster (Davidson, 1983). En la imagen 2, se muestra una etapa del juego en donde el usuario debe resolver operaciones matemáticas presentadas en la pantalla de una nave espacial, para luego dispararle al objeto asociado a la respuesta correcta, de entre todos los que se encuentran a la deriva en el espacio exterior. Sin embargo como es posible evidenciar en este ejemplo, la acción de responder preguntas de matemática simbólica al interior de la nave no tiene ninguna relación con el contexto virtual que propone el videojuego al usuario (una nave espacial disparando en el espacio), por lo que aprendizaje y entretenimiento se encuentran totalmente disociados, teniendo como única y débil unión la acción de disparar.



Imagen 2. Math Blaster (Davidson, 1983)



Imagen 3. Fruit Ninja: Math Master (Halfbrick Studios, 2019)

Este mismo problema que observamos en un juego de hace ya más de 30 años, se sigue repitiendo en la actualidad con juegos como Fruit Ninja: Math Master (Halfbrick Studios, 2019), en donde el usuario debe responder preguntas de aritmética o geometría básica cortando las frutas asociadas a la respuesta correcta (imagen 3). En este caso, una vez más no existe una relación entre el contexto de jungla en donde se cortan frutas y el problema matemático propuesto. No se le ofrece al usuario una razón para involucrarse y comprometerse con el problema, porque este a todas luces se ve fuera de lugar en los escenarios presentados. Como explica Devlin (2011):

Poner expresiones simbólicas en el ambiente de un juego de educación matemática es confundir el pensamiento matemático, con su representación simbólica estática en una hoja de papel (...) Para construir juegos matemáticos realmente exitosos, hay que separar la actividad (una forma de pensar) con su familiar representación en términos de expresiones simbólicas (p.6).

> tipologías de videojuegos

Habiendo establecido el potencial que existe en los videojuegos como medio de aprendizaje, y al mismo tiempo el problema que estos presentan en las iteraciones actuales por diseñar juegos de esta índole, resulta entonces necesario retroceder y analizar los diferentes géneros de videojuegos que existen en la actualidad, para así entender y luego discernir las potencialidades que estos tienen en el contexto de la educación para niños.

En la actualidad existen decenas de géneros de videojuegos, los cuales muchas veces se mezclan generando híbridos de los mismos. A continuación se presenta un listado, con reseñas y ejemplos, de las tipologías más pertinentes para esta investigación, las cuales fueron rescatadas del libro *Playful design: Creating game experiences in everyday interfaces* de Ferrara (2012):

- > **Plataforma:** el jugador debe sortear obstáculos y plataformas (la mayoría de las veces saltando) para completar los niveles. Ej: Super Mario Bros.
- > **Arcade:** el jugador debe llevar a cabo misiones simples, rápidas y cortas, las cuales van aumentando su dificultad progresivamente. Ej: Pac Man.
- > **First Person Shooter:** utilizan una perspectiva en primera persona, en donde el jugador debe disparar a los enemigos para ganar. Ej: Call of Duty.
- > **Estrategia:** el jugador por lo general controla varios personajes a la vez, debiendo desarrollar diferentes estrategias para cumplir con éxito las misiones entregadas. Ej: Age of Empires, Plants vs. Zombies.
- > **Puzzle:** como lo dice su nombre, el jugador debe completar puzzles propuestos haciendo uso de sus habilidades menta-

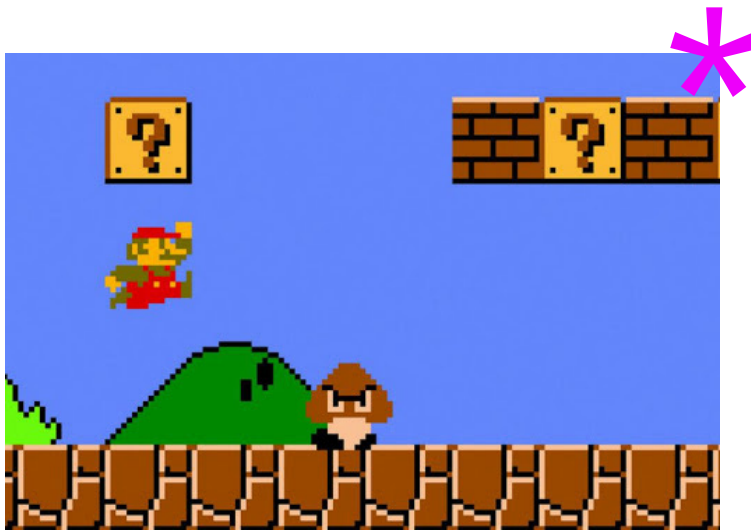


Imagen 4. Super Mario Bros (Nintendo, 1985)

les. Ej: Tetris, Candy Crush.

> **Ritmo:** el jugador debe usar la música y su ritmo para desenvolverse en el juego. Ej: Guitar Hero, Dance Dance Revolution.

Del listado presentado, en general, los juegos educativos tienden a utilizar el género Puzzle. Esto se debe a que existe una obvia relación entre el desafío mental que estos presentan y el aprendizaje. Si bien esta puede parecer como la opción ideal, lo cierto es que también existe gran potencial en las otras tipologías para apoyar el aprendizaje, ya que estas se alejan de la clásica idea de aprendizaje, y por lo mismo pueden llegar a ser un medio para transmitir conocimiento de manera atractiva.

Si bien todos los géneros presentados tienen un cierto potencial para el área educativa, de todos ellos, saltan a la vista los videojuegos de Ritmo, ya que, como se analizará más adelante, la música y las matemáticas han estado entrelazadas desde tiempos de antaño, por lo que esta unión, en el contexto de los videojuegos, podría ser un gran aliado en la labor de enseñar de manera lúdica. A continuación se analiza esta tipología de videojuegos de manera más detallada.

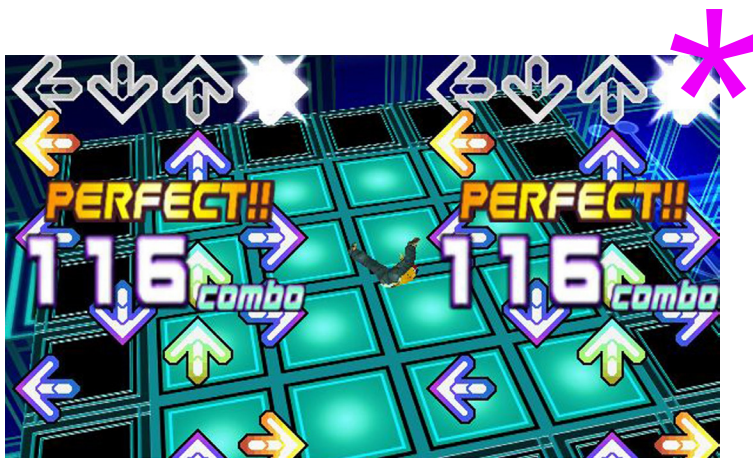


Imagen 5. Dance Dance Revolution (Konami, 1998)

> videojuegos de ritmo

Como se explicó anteriormente, los videojuegos de ritmo son aquellos juegos en los que el jugador debe usar la música y su ritmo para desenvolverse en el juego. De este género se han creado diversos videojuegos, existiendo numerosas interpretaciones del género como tal, teniendo todas la música como un elemento clave de su jugabilidad. En la mayoría de estos juegos, la música se presenta como un fin último, tal y como ocurre en los célebres juegos Rock Band y Guitar Hero, en donde el jugador toma el papel de un músico, debiendo seguir las notas simplificadas de una canción para ganar. Para los propósitos de este proyecto, según lo enunciado anteriormente, resulta interesante analizar aquellos juegos de ritmo que utilizan la música como un medio para lograr otro fin externo a ella. A continuación se presentan dos casos notables de esta categoría.

En primer lugar encontramos el juego para plataformas móviles Geometry Dash (Topala, 2013), el cual además de ser un juego de ritmo, es también un juego de plataforma. En él, el jugador debe controlar un cuadrado para avanzar a través de los obstáculos de un mundo geométrico, en donde la única opción para moverse es saltar (el cuadrado avanza hacia la derecha de manera automática y constante). Lo interesante de este título es que dada la alta dificultad de los niveles del juego, para ganar, el jugador puede ayudarse de la canción que acompaña a cada nivel, ya que los saltos a realizar se encuentran coordinados con el ritmo de la música. Cabe señalar que en la interfaz del juego nunca se le indica al jugador que debe o puede seguir la música, por lo que esta acción se genera de manera intuitiva gracias a la capacidad inherente al ser humano de seguir el ritmo.



Imagen 6. Geometry Dash (Topala, 2013).

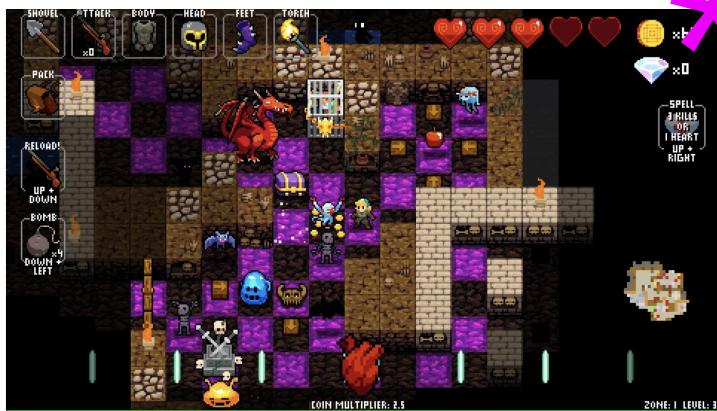


Imagen 7. The Crypt of the Necrodancer (Brace Yourself Games, 2015)

Otro ejemplo es el juego para consolas, computadores e incluso dispositivos móviles, The Crypt of the Necrodancer (Brace Yourself Games, 2015). Este juego es radicalmente distinto a cualquiera de su género, ya que lleva un paso más allá el uso de la música. En él, el jugador debe avanzar por distintos niveles de un calabozo, enfrentándose a su paso con diversos enemigos, pero con el giro de que únicamente podrá moverse de su posición si lo hace al ritmo de la música. Esto agrega gran riqueza a la jugabilidad del título, ya que a su vez, los enemigos siempre se moverán siguiendo patrones al ritmo de la música. Teniendo esto en consideración, es fácil concluir que este juego aprovecha el ritmo de manera provechosa, puesto que a través de él logra que los jugadores puedan usar sus habilidades para encontrar patrones en los enemigos y al mismo tiempo desarrollar patrones propios para desenvolverse en cada uno de los niveles del juego.

> videojuego matemático

Como ya se mencionó al inicio, existen numerosos videojuegos diseñados con la intención de enseñar matemáticas a estudiantes. A continuación se presenta un ejemplo cuya aproximación no simbólica a las matemáticas resulta de interés para el presente proyecto.

Wuzzit Trouble (Brainquake, 2016) es un juego desarrollado por el matemático y profesor de Stanford Keith Devlin. El objetivo del juego es liberar a los personajes atrapados, haciendo girar engranajes para obtener las llaves necesarias. Estas llaves se encuentran en algunos de los números del engranaje mas grande, y la idea es rotar el engranaje pequeño la cantidad de veces necesaria para que el engranaje grande gire y la llave de este quede posicionada sobre el marcador. Por ejemplo, en el caso de la imagen 7, será necesario girar una vez el engranaje pequeño para alcanzar la llave que se encuentra en el número 3. Así, el juego va aumentando su dificultad progresivamente agregando más engranajes pequeños y llaves.

Si bien la jugabilidad de este juego no es demasiado dinámica ni lúdica, es interesante la forma en que afronta las matemáticas de una manera no simbólica, llevando el problema a algo tangible en la forma de engranajes que giran. Esta idea enfocada en niños promueve las competencias matemáticas y abre camino a un nuevo enfoque de juegos móviles matemáticos (Pope y Mangram, 2015).



Imagen 7. Wuzzit Trouble (Brainquake, 2016)

> 04

música

y ritmo

¿No puede acaso la música ser descrita como la matemática del sentido, y la matemática como la música de la razón? ¡El alma de ambas la misma! Así el músico siente la matemática y el matemático piensa la música, —la música el sueño, la matemática el trabajo— cada uno recibiendo su consumación del otro. (James Joseph Sylvester, 1865, p.419)

Esta cita del célebre matemático inglés deja entrever la estrecha relación que existe entre estas dos disciplinas, la cual se puede rastrear hasta la Grecia antigua, en donde Pitágoras durante el siglo V A.C. sugirió que las relaciones matemáticas eran un elemento fundamental de las propiedades físicas, incluida la música (Southgate y Roscigno, 2009). Esta idea planteada por Pitágoras se sustenta hasta el día de hoy, ya que como explican Geist y Geist (2008) “la música contiene numerosos constructos matemáticos en su estructura básica. Elementos musicales como ritmo, tempo, volumen, melodía y armonía poseen conceptos inherentemente matemáticos, como propiedades espaciales, secuencias, conteo, patrones y correspondencias 1 es a 1” (p.21). De hecho, los mismos autores postulan una serie de actividades que pueden ser realizadas al interior de la sala de clases para potenciar el aprendizaje matemático a través de la música y sus propiedades.

Un caso musical/matemático a modo de ejemplo es el de las figuras musicales (figura 1). Si tomamos una redonda como punto de partida, podemos constatar que una blanca equivale a $\frac{1}{2}$ de esta, una negra equivaldría entonces a $\frac{1}{4}$ de la primera, una corchea a $\frac{1}{8}$ y una semicorchea a $\frac{1}{16}$. Este simple ejemplo musical podría servir para ilustrar a los estudiantes de matemáticas el concepto de las fracciones.

Otro antecedente musical interesante es el del video El Poder de

la Escala Pentatónica en donde el célebre músico Bobby McFerrin demuestra, durante un evento del World Science Festival (2009), el poder que tiene la escala pentatónica en la cognición humana. Esta experiencia consistió en la interacción del artista con el público del evento, en donde se desplazaba en intervalos regulares a lo largo del escenario, acompañando cada movimiento con una nota de la escala pentatónica en orden creciente hacia la derecha (notas cada vez más altas) y decreciente hacia la izquierda (notas cada vez más bajas). Luego de esta demostración, logra que la audiencia, sin la intervención sonora del músico, acompañe los movimientos que este realizaba, cantando la nota correspondiente, pudiendo estos incluso extrapolar notas más altas o más bajas de las que McFerrin inicialmente demostró.

Este caso ilustra el poder que tiene la música en los procesos cognitivos humanos, en particular se observa cómo las personas son capaces, a partir de la primera ejemplificación que hace el músico, de detectar el patrón que existe entre las notas de la escala pentatónica (en ella la cantidad de tonos entre las notas es siempre la misma) y a partir de esto son capaces de extrapolar este patrón para completar las notas de acuerdo a las señales visuales que entrega su interlocutor.

Es por todo lo anterior que resulta claro que la música es una disciplina intrínsecamente matemática, en donde su práctica y experimentación permite evidenciar y tangibilizar distintos fenómenos propios de las matemáticas. Y más allá de esto, los fenómenos musicales, tales como el de la escala pentatónica señalado, tienen el potencial de generar comportamientos intuitivos en el ser humano que podrían ser canalizados para generar instrucciones en el ámbito de las matemáticas

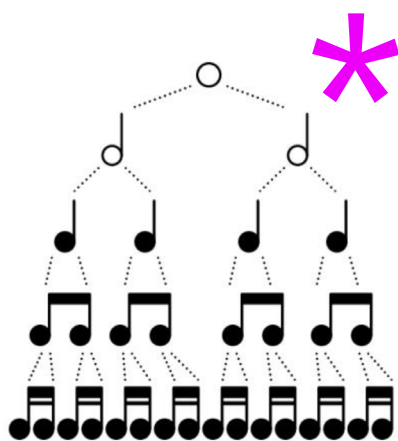


Figura 1. Equivalencia de Figuras Musicales

> 05

1a

oportunidad

El procesamiento de fracciones es parte de nuestra vida cotidiana y es usado para estimar rebajas, seguir recetas o leer un mapa. Más aún, las fracciones juegan un rol fundamental en las matemáticas, dado que están involucradas en el razonamiento probabilístico, proporcional y algebraico. (Gabriel et al. , 2013, p.1)

Sabiendo la importancia que tienen las fracciones en la vida cotidiana, los problemas que existen en el aprendizaje de estas y el potencial que poseen los videojuegos en contextos de aprendizaje, surge la oportunidad de diseñar un videojuego ritmo, que pueda desde su carácter lúdico empaquetar de manera tangencial conocimientos de fracciones, logrando enseñar sin perder el fin último de los juegos que es entretener a quién lo juega, valiéndose para esto de herramientas derivadas de un método de enseñanza que propone el empaquetamiento de conceptos académicos en videojuegos, mediante una analogía lúdica que de manera natural incluya tales contenidos. Este método de enseñanza se conoce como Aprendizaje Tangencial (Duran, 2016).

A partir de la revisión bibliográfica y el estado del arte, la invitación es a fusionar videojuegos, matemáticas y música en una propuesta que, equilibrando estos tres factores, pueda lograr lo que muchos juegos a la fecha no han logrado hacer de manera óptima debido a su extrema dependencia de las matemáticas simbólicas para su narrativa: crear una experiencia de juego en donde las matemáticas tengan consecuencias reales y por lo tanto comprometan al jugador a dominarlas.

> 06 formulación

¿Qué?

El Sendero del Hechicero es un videojuego formativo matemático rítmico, para el aprendizaje tangencial de conceptos matemáticos en el ámbito de las fracciones por medio de dinámicas rítmicas y la resolución de distancias como métrica de desplazamiento.

¿Por qué?

La evidencia referida al aprendizaje de contenidos matemáticos releva el valor del contexto como catalizador de la apropiación de contenidos complejos. En este sentido, el potencial de los videojuegos como medio para desafiar un aprendizaje situacional, sumado a un acompañamiento musical se presenta como un mecanismo pertinente de educación matemática.

¿Para qué?

Promover el desarrollo de habilidades matemáticas en el ámbito de las fracciones, para complementar las actividades académicas de los videojugadores desde sus actividades de entretenimiento digital.

Objetivos Específicos

> Analizar los métodos actuales de aprendizaje matemático y las analogías lúdicas existentes, para ser extrapoladas a un videojuego educativo.

I.O.V: La efectividad se mide en razón al nivel de coherencia de los hallazgos con los principios propios de la pedagogía como disciplina.

> Desarrollar una analogía lúdica para la transferencia de contenidos relativos a fracciones.

I.O.V: Su efectividad se comprueba a partir de la percepción de los estudiantes de dichas analogías, estos deben ser percibidos como juegos antes que herramientas de educación.

> Vincular dinámicas rítmicas en el desarrollo de la estructura de navegación del videojuego.

I.O.V: Analizar los patrones de segmentación de la navegación, desde los conceptos de temporalidad y repetición.

> Empaquetar la propuesta para distintas plataformas, con el fin de ser distribuida a niños como complemento a lo aprendido en la sala de clases.

I.O.V: Su efectividad se mide en proporción a la cantidad de entidades que adopten e implementen esta propuesta en su proceso de enseñanza matemática.

> 07 Los jugadores

> enseñanza aritmética escolar

Teniendo claro el problema que existe hoy en día en la enseñanza matemática, y habiendo identificado la potencialidad que poseen los videojuegos para abordar esta situación, cabe entonces preguntarse ¿cuál es el mejor momento en el proceso de educación de los niños para realizar esta intervención lúdica y educativa a través de videojuegos? A continuación se responde a esta interrogante, desde sus dos aristas: el currículum educativo y los comportamientos de uso de videojuegos.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este proyecto es desarrollar las habilidades aritméticas y el pensamiento matemático, desligándose de las clásicas representaciones simbólicas utilizadas por los videojuegos, haciendo uso de analogías. A partir de una revisión de las bases curriculares publicadas por el Ministerio de Educación de Chile (2018), es posible constatar que es en primero básico en donde comienza el aprendizaje algebraico, pasando de lo pictórico a lo simbólico, señalándose que entre primero y sexto básico:

El tránsito hacia la representación simbólica es más sólido si luego se permite una etapa en que lo concreto se representa icónicamente, con imágenes y representaciones “pictóricas”, para más tarde avanzar progresivamente hacia un pensamiento simbólico-abstracto. Las metáforas, las representaciones y las analogías juegan un rol clave en este proceso de aprendizaje, que da al alumno la posibilidad de construir sus propios conceptos matemáticos (p.215).

Por lo tanto un videojuego con las características señaladas resultaría particularmente útil y pertinente durante esta etapa, en donde justamente se busca generar una transición de lo simbólico a lo pictórico mediante el uso de metáforas o analogías. Con esto, el rango etario se acota entre los 8 y 12 años.

> niños y videojuegos

Otro factor a tener en cuenta durante la caracterización del usuario, es su uso de videojuegos. Respecto a esto, el grupo NPD (2011) señala que en Estados Unidos un 91% de los niños entre 2 y 17 años juega videojuegos. En particular, de acuerdo a un estudio de Common Sense Media (2015) el 66% de los niños entre 8-12 años juegan videojuegos, con un promedio de 2 horas diarias destinadas a ello. Y dentro de este mismo segmento, un 44% utiliza videojuegos móviles, siendo los tablets la plataforma móvil preferida.

De todo esto se desprende la pertinencia de un videojuego educativo para el rango etario seleccionado, en particular de tipo móvil, ya que como se observa en el estudio casi la mitad de estos niños juega videojuegos móviles, teniendo esta plataforma también el beneficio de ser más asequible para la población en general. Además como refleja otro estudio del NPD (2016) la tendencia global es al crecimiento del consumo de este tipo de videojuegos:

El uso de celulares y dispositivos móviles para jugar videojuegos se encuentra en un momento más alto, superando tanto a los computadores como consolas en general y en varios segmentos de jugadores. Setenta y ocho por ciento de los jugadores usan algún tipo de celular o dispositivo móvil para jugar, un incremento del siete por ciento respecto al 2014.

> La aprensión de los padres

La percepción de los padres es otro aspecto importante a considerar, ya que dado el rango etario seleccionado, la opinión e impresión que estos tengan de los videojuegos puede afectar directamente el desarrollo del proyecto. En particular se sabe de la aprensión que existe en los padres para con los videojuegos, ya que como se menciona en un artículo del New York Times:

Al centro de todo este problema se encuentran los juegos móviles que persuaden a los niños, quienes son los más vulnerables, a comprar bienes virtuales usando cuentas con las tarjetas de crédito de sus padres mientras juegan. Se ha transformado en un problema de tal magnitud, que estos juegos han pasado a llamarse "apps carnada" en demandas colectivas (Chen, 2019).

>

08

metodología proyectual

Para el desarrollo del proyecto se estableció una metodología con el objetivo de guiar y ordenar el proceso de investigación y diseño. Esta metodología consta de ocho fases para su desarrollo, sin embargo es importante notar que el proceso no es lineal, considerando que estas fases pueden llegar a superponerse temporalmente según resulte necesario. A continuación se enumeran y describen brevemente cada una de las fases que componen la metodología del proyecto.

1_ Investigación de la educación matemática actual

Esta fase consiste en una revisión exhaustiva de literatura respecto de las matemáticas, según su metodología de enseñanza y la importancia que esta tiene para la vida cotidiana. La idea de este proceso es comprender de mejor modo las aristas de la educación matemática, para con ello poder enfrentar de mejor manera la intervención de diseño a realizarse posteriormente.

2_ Análisis del estado del arte

Consiste en la exploración y análisis de las respuestas que existen a la problemática identificada, y en específico, los videojuegos educativos ya existentes. Con esto, además se pretende identificar los principales referentes para el proyecto, los cuales pueden estar fuera del área del diseño de videojuegos educativos, y con esto aislar las características e interacciones clave del género.

3_ Caracterización del jugador

Fase de recopilación de datos e información del usuario. La idea de esta etapa es identificar el rango etario de mayor efectividad para el proyecto, tomando en cuenta tanto su carácter lúdico como su aporte para la educación y formación del pensamiento matemático. Todo esto implica la revisión y consideración de los currículos oficiales propuestos para la educación matemática.

4_ Experimentación con software de desarrollo de videojuegos

Considera el aprendizaje de quien realiza este proyecto en el área

del diseño, programación y desarrollo de videojuegos. El propósito de esta fase es formar una idea integral del workflow y de las potencialidades que tiene el programa Unity como interfaz de desarrollo de videojuegos. Para esto se realizan pruebas rápidas de programación y diseño de distintos estilos de videojuegos.

5_ Diseño de la Analogía Matemática

Una vez llevado a cabo todo el trabajo previo de recopilación de antecedentes y referentes, se da inicio al proceso de formalización del proyecto mismo, es decir, comienza el diseño del videojuego de aprendizaje matemático. El objetivo de esta primera fase de formalización es diseñar una analogía que permita extrapolar conceptos de las fracciones matemáticas a un lenguaje que resulte verosímil en el contexto de un videojuego.

6_ Proceso de prototipado y testeo

Una vez definida la idea central del juego, se da inicio al proceso de prototipado y testeo. En él se busca darle forma tanto a los aspectos de diseño gráfico como de diseño de interacción del juego. Esto se logra mediante un proceso iterativo de testeos en usuarios y prototipos como respuesta a lo aprendido de los testeos.

7_ Prototipo final videojuego móvil

Como desenlace de todo lo anteriormente mencionado, se define el desarrollo del prototipo final del videojuego educativo matemático. Este debe estar diseñado para funcionar de manera óptima en dispositivos móviles, por lo que el tipo de interacción propuesta debe responder a esta limitación.

8_ Redacción de paper académico a partir del conocimiento levantado

Finalmente, se incluye la etapa de difusión, la cual contempla la redacción de una publicación académica que permita dar a conocer el videojuego con todos sus beneficios para el aprendizaje matemático, y extrapolar las técnicas observadas del aprendizaje tangencial generado con el juego.

> 09 el sendero del hechicero

> fracciones como medida

A partir de todo lo anteriormente explicado surge la idea de desarrollar un videojuego matemático que, aprovechando las estrategias del aprendizaje tangencial, pueda transferir conocimientos propios de las fracciones. En concreto, que ayude con el complejo y muchas veces ignorado sujeto de las fracciones impropias, ya que como se elaboró al inicio, la educación matemática temprana se encuentra inherentemente centrada en las fracciones propias o menores a 1. El problema yace en que, para los niños, la forma en que siempre se les ha explicado y dado a entender lo que es una fracción es predominantemente como parte-todo, con los icónicos ejemplos de una pizza o torta dividida en sectores circulares. Pero cuando se introduce una fracción cuyo denominador supera al numerador, ocurre un quiebre en donde muchos niños sencillamente no logran imaginar abstractamente este tipo de número, debido al abuso que existe de la representación como parte de un todo ya mencionada.

Es por esto que el juego desarrollado apela a otro de los tipos de representaciones utilizados en el mundo de las fracciones, que es la fracción como forma de cuantificar medidas. Con esta idea en mente, se hace entonces necesario el diseño de una analogía lúdica que permita incorporar las fracciones naturalmente en un contexto, sin depender exclusivamente de la representación simbólica de las matemáticas, así como ocurría con los niños en el mercado de Brasil, en donde las matemáticas eran tan inherentes al contexto que no producían el rechazo observado en la sala de clases.

> juego de plataforma y ritmo

A partir de todo esto y pensando en la representación de fracciones como medida, surge la oportunidad de desarrollar un videojuego educativo con un género completamente distinto a los comúnmente utilizados en juegos de esta naturaleza: un juego de ritmo, pero con el giro de que se enmarque en otro de los géneros de videojuego que se enunciaron anteriormente, los juegos de plataforma. Esto en primer lugar por su popularidad en el rango etario seleccionado, siendo una de las franquicias de videojuegos más populares y longevas de la historia Super Mario Bros, cuyo género es precisamente la plataforma, pero incluso más allá de esto, un juego de plataforma ofrece la posibilidad de aprovechar la distancia recorrida por el personaje para ser cuantificada en forma de fracciones, para así utilizar el significado de fracciones como medida.

Además de lo enunciado, y trascendiendo el ámbito educativo, está la oportunidad de diseñar un videojuego que innove en el rubro general en términos de gameplay, ya que otro aspecto clave que se levantó durante el desarrollo de esta investigación fue el ritmo como catalizador para las fracciones matemáticas.

Ya vimos que ritmo y matemáticas están inherentemente relacionados desde los orígenes de esta disciplina, y este proyecto ofrece la posibilidad de canalizar estos dos y empaquetarlos en un juego de plataforma rítmico, obteniendo como resultado un modo de juego que hasta la fecha no existe. Si bien hay referentes que se acercan a algo similar, como es el caso ya expuesto de Geometry Dash, en donde, aunque el ritmo no es esencial al gameplay (se puede jugar sin música), sí resulta ser una pieza clave en la experiencia de juego.

> dinámica de juego

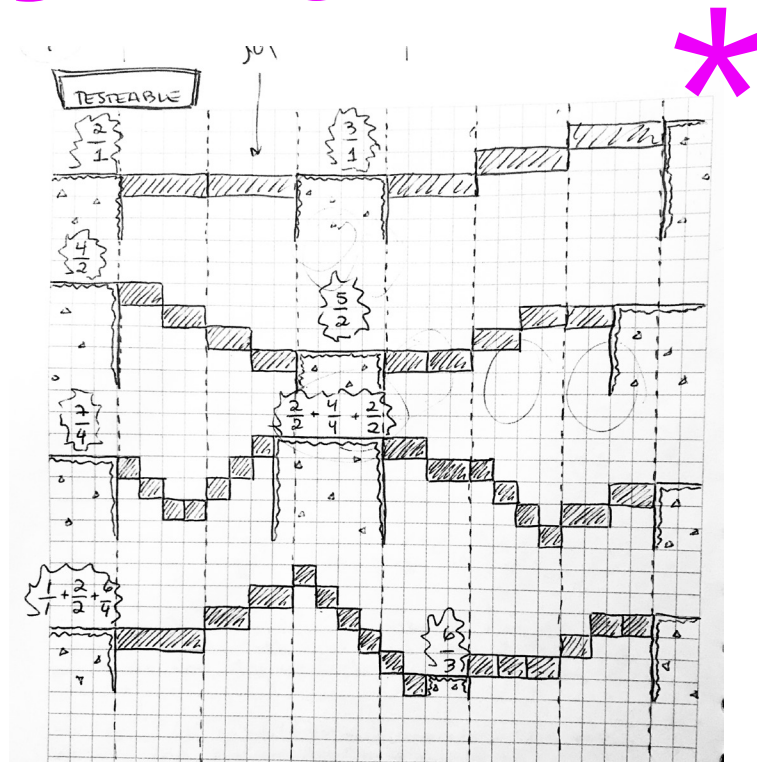


Imagen 8. Material fundante del juego.

Teniendo ya claros estos tres elementos centrales del juego: fracciones, ritmo y plataformas, comienza el proceso iterativo de diseño para encontrar una interacción en que converjan estos tres de manera orgánica.

Inicialmente se trabajó con prototipos del tipo rapid mockup para probar y testear ideas en distintos usuarios. En la Imagen 8 se observa el prototipo y material fundante del concepto que da origen al juego final desarrollado.

La idea esencial consiste en un camino de terrenos separados entre sí por vacíos. Este camino tiene un beat de fondo que indica un determinado ritmo, el cual se encuentra además expresado en términos de distancia gráficamente. El objetivo es que el personaje, que se mueve automáticamente con velocidad constante a lo largo del camino (autoscroll), pueda sortear los vacíos, clickeando para hacer aparecer plataformas al ritmo del beat según las fracciones señaladas al inicio de cada uno de los vacíos. De no seguir correctamente el ritmo, la plataforma no aparece, el personaje cae y el nivel se reinicia.

Por ejemplo si la fracción indicada al inicio del camino es $1/1$ esto significa que el jugador debe clickear una vez justo en el beat y la plataforma que cubre el espacio recorrido en un beat por el personaje aparecerá, si la fracción indicada es $2/2$, esto implica que el jugador debe subdividir el beat en 2, y por lo tanto clickear dos veces dentro del beat para con esto hacer aparecer 2 plataformas que entre sí, cubren el espacio de un beat, lo mismo ocurre análogamente para $4/4$ y el resto de las posibles fracciones. De este modo, la intención es que al seguir el ritmo para hacer aparecer

plataformas, los jugadores aplicarán intuitivamente los conceptos de fracción como unidad de medida y fracción impropia.

Esta idea se testeó usando simplemente un metrónomo, un lápiz como percusión y el mapa ilustrado en la figura, con el fin de afinar el concepto y llegar a una interacción que fuese además de educativa, intrínsecamente entretenida para cualquier usuario, sin importar la edad. Con la idea base clara, es que se procedió a desarrollar prototipos digitales que permitieran visualizar y testear ya de manera concreta el gameplay del videojuego.

> CS50's Introduction to game development

Para el desarrollo de los prototipos se evaluaron diversos Game Engines para establecer, de acuerdo a las necesidades del juego y del desarrollo, cuál sería el más apropiado.

Si bien durante la etapa inicial del proceso de investigación se trabajó con distintos prototipos en la plataforma de desarrollo de videojuegos Unity, luego de profundizar en la investigación, se observó potencial en el engine de videojuegos Love 2D, cuya área particular de trabajo son los juegos en dos dimensiones (que es precisamente el caso de este proyecto) y que además entrega el beneficio de que su estilo de programación basado en el lenguaje multi-paradigma Lua, es mucho más simple, flexible y adaptable que los robustos y complejos módulos usados por Unity.

Además, su ausencia de interfaz de desarrollo, fuerza a el uso de los tradicionales editores de texto para la escritura del código, lo que lo convierte en un excelente ejercicio e instancia de aprendizaje para quien desarrolla el proyecto. A partir de esto, la programación se transforma en uno de los aspectos clave del proceso, y se procederán a explicar de manera simple las decisiones críticas de diseño tomadas también desde el ámbito de la programación.

Habiendo elegido Love 2D como el game engine a utilizar, se asistió, paralelamente de manera complementaria para la investigación, a un curso online de Harvard University llamado CS50's Introduction to Game Development para aprender y adquirir todos los conocimientos necesarios para el desarrollo de un videojuego de esta índole, desde las sutilezas y aristas de Lua como lenguaje de programación, hasta las potenciales librerías y módulos externos que existen en Love 2D para facilitar la desafiante tarea de

programación.

A continuación se revisarán una a una las distintas iteraciones de prototipado del videojuego, para con ellas ir explicando por partes las distintas decisiones de diseño que se fueron tomando durante el proceso.

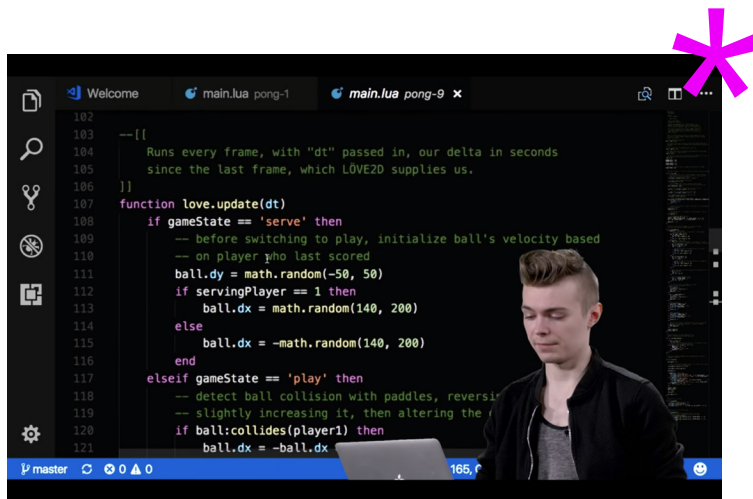


Imagen 9. CS50's Introduction to Game Development (CS50, 2018)

> prototipo 1 los cimientos

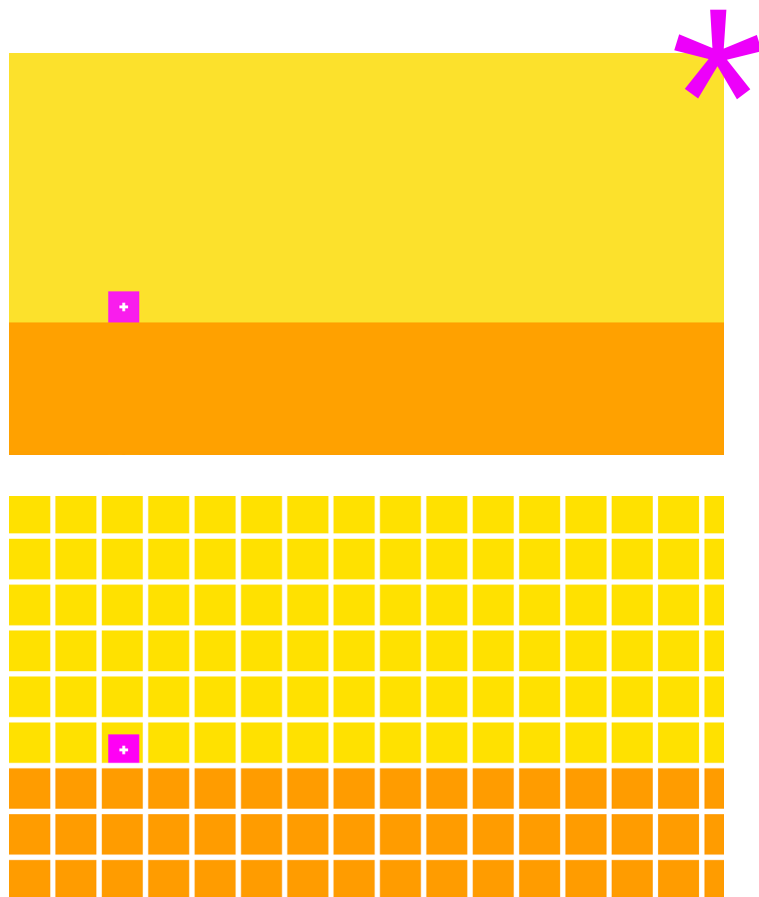
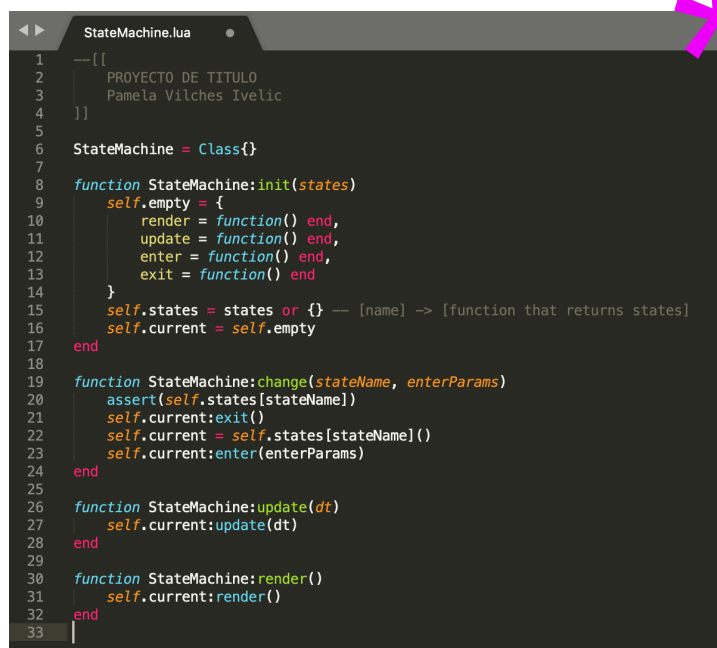


Imagen 10. Matriz de sprites, arriba lo que se ve en el juego, y abajo la subdivisión interna

El primer prototipo desarrollado cumplió el objetivo de sentar los cimientos estructurales del juego, incluyendo los principales elementos programados que se fuesen a necesitar después. Para esto se ocupó un paradigma de renderización en base a Tiles o baldosas utilizado comúnmente en juegos de plataforma. A grandes rasgos, este funciona con una matriz de sprites (mapa de bit 2D con gráfica) de 16x16 píxeles que representa el mapa completo en donde cada elemento de dicha matriz puede contener uno de tres sprites distintos: terreno normal, terreno superior o vacío. Este paradigma es muy flexible y modificable, lo cual resulta muy útil para implementar la generación procedural de niveles del juego que se explicará más adelante.

Una vez implementado el mapa, se agregó un personaje (nótese que para los prototipos del 1 al 4 se trabajó únicamente con sprites temporales los cuales a partir del prototipo 5 fueron reemplazados por los sprites definitivos), al cual se le programaron propiedades físicas para que este pudiese moverse. En este caso, se incorporó una fuerza que lo empuja hacia abajo (gravedad) y otra fuerza que lo desplaza con velocidad constante hacia la derecha una vez que se detecta que el personaje está parado sobre terreno, y hasta que deje de estar sobre terreno firme, en cuyo caso el personaje simplemente caerá al vacío.

Internamente, además se implementó un paradigma computacional llamado State Machine (todo el código está escrito en inglés siendo esta la práctica mundialmente aceptada e incentivada), la cual actúa como controlador de las fases del juego. La virtud de esta Máquina de Estados es que permite modular las fases para así dar orden y limpieza al código, facilitando el desarrollo



```

1  --[[
2  PROYECTO DE TITULO
3  Pamela Vilches Ivelic
4  ]]
5
6  StateMachine = Class{}
7
8  function StateMachine:init(states)
9      self.empty = {
10         render = function() end,
11         update = function() end,
12         enter = function() end,
13         exit = function() end
14     }
15     self.states = states or {} -- [name] -> [function that returns states]
16     self.current = self.empty
17 end
18
19 function StateMachine:change(stateName, enterParams)
20     assert(self.states[stateName])
21     self.current:exit()
22     self.current = self.states[stateName]()
23     self.current:enter(enterParams)
24 end
25
26 function StateMachine:update(dt)
27     self.current:update(dt)
28 end
29
30 function StateMachine:render()
31     self.current:render()
32 end
33

```

Imagen 11. Extracto del código base del State Machine.

del programa. Así, cada estado particular definido en la máquina contendrá el código específico a ejecutar durante ese momento de la interacción. Los estados definidos fueron los siguientes:

> IntroState

Estado contenedor de toda la introducción del juego, momento en el cual se presentará la historia a desarrollarse.

> StartState

Estado contenedor del menú de inicio del juego, momento en el cual el jugador podrá optar por jugar el Tutorial, jugar las etapas principales o simplemente salir del juego.

> TutorialState

Estado contenedor del Tutorial de juego, momento en el cual se desarrolla la etapa de agencia, en donde se le presenta al jugador el paradigma de uso del juego.

> PlayState

Estado contenedor de las 3 etapas del juego, es durante este estado que ocurren la mayor cantidad de procesos del videojuego, ya que es en él donde el jugador pasará la mayoría del tiempo.

> prototipo 2 inputs

El siguiente prototipo incorpora la posibilidad de obtener inputs del usuario para hacer aparecer plataformas en los vacíos entre terrenos. Con este fin se incorporan dos nuevos elementos posibles a la matriz de sprites que representa un nivel: pre-plataforma y plataforma. La pre-plataforma sirve para mostrar el espacio y ubicación que ocuparía una plataforma al hacerla aparecer con el input del usuario, mientras que la plataforma es precisamente la que aparece luego de dicho input. Estas plataformas a su vez se dividen en 3 subtipos: la plataforma de 1 beat para las fracciones con denominador igual a 1, la plataforma de $\frac{1}{2}$ beat para las fracciones con denominador igual a 2 y finalmente la plataforma de $\frac{1}{4}$ de beat para las fracciones con denominador igual a 4. Se decidió llegar hasta el denominador máximo 4, dado que al hacer pruebas, se constató que la intuitividad de seguir el ritmo solo llega hasta la división por 4, más allá resulta extremadamente difícil hacer esta conversión mentalmente y por lo tanto la interacción no funciona.

Con estos nuevos elementos ya incorporados al código y al repertorio de sprites, se implementó una función que detecta cuando el usuario aprieta la tecla espacio y consiguientemente hace aparecer una plataforma, lo mismo para la tecla P, para permitir pausar el desarrollo del juego en cualquier momento.

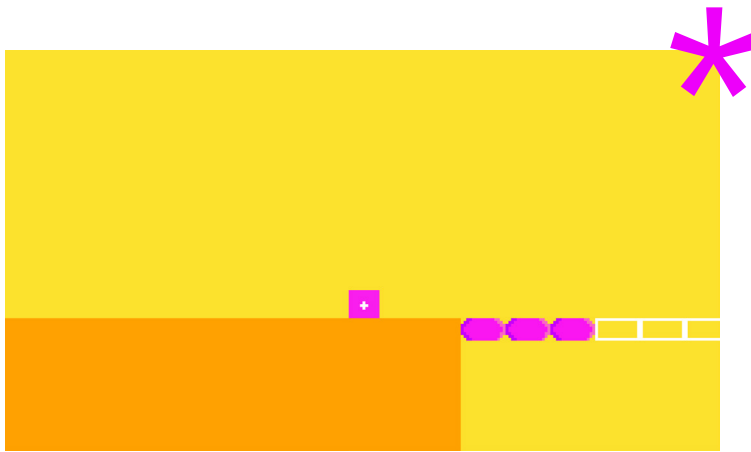
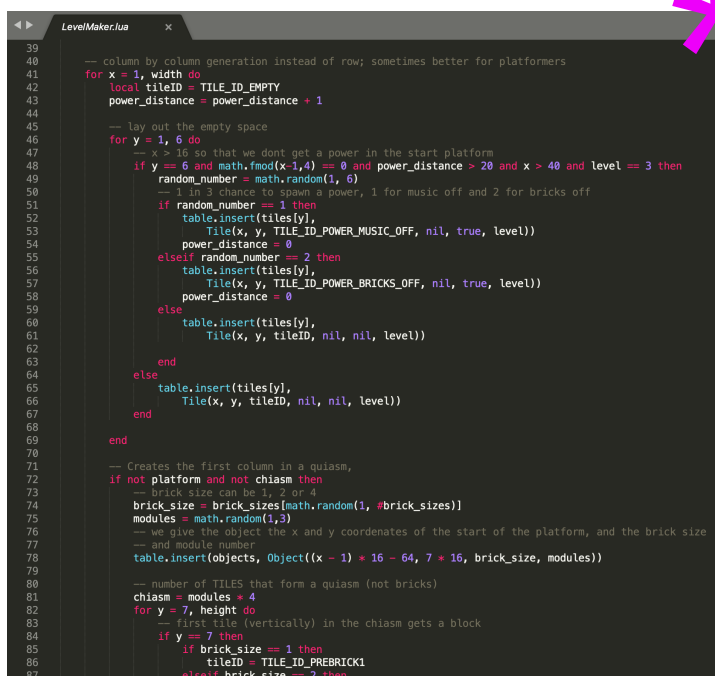


Imagen 12. Prototipo dos con pre-plataformas y plataformas.

> prototipo 3 generación de niveles

Con el prototipo 3, llega una parte crucial del videojuego que ya fue introducida anteriormente: la generación procedural de niveles. Este tipo de diseño de etapas implica la generación de niveles de manera aleatoria por parte del computador en base a parámetros especificados con anterioridad en el programa mismo. El mayor atributo de esto es que permite que cada nivel generado sea completamente distinto del anterior, por lo que por un lado se enriquece el aprendizaje, ya que de esta forma no es posible que el usuario se aprenda de memoria los niveles, sino que en cada iteración del mismo nivel deberá enfrentarse a un desafío completamente distinto y nuevo. Además, por otro lado se logra una experiencia de juego mucho más dinámica y entretenida.

Para esto se implementó entonces un módulo en el programa llamado LevelMaker, el cual recibe dos parámetros: ancho y alto. Esto le da versatilidad al juego, ya que es fácil modificar la longitud de las etapas para distintas instancias de testeo o necesidades futuras. Con estos dos datos, el programa está diseñado para primero generar 16 columnas base con terreno sólido para que el inicio de cada nivel siempre sea plano, y luego aleatoriamente genera vacíos que pueden tener un ancho de entre 1 a 3 beats, acompañados de una fracción que lo represente y las pre-plataformas correspondientes. Una vez creado el vacío, el programa vuelve a generar terreno sólido del ancho de un beat y se repite todo el proceso hasta rellenar el ancho señalado al inicio. Con esto se crea el mapa del nivel en forma de matriz, el cual posteriormente es renderizado en pantalla con sus respectivos sprites.



```

39
40 -- column by column generation instead of row; sometimes better for platformers
41 for x = 1, width do
42   local tileID = TILE_ID_EMPTY
43   power_distance = power_distance + 1
44
45   -- lay out the empty space
46   for y = 1, 6 do
47     -- x = 16 so that we dont get a power in the start platform
48     if y == 6 and math.fmod(x-1,4) == 0 and power_distance > 20 and x > 40 and level == 3 then
49       random_number = math.random(1, 6)
50       -- 1 in 3 chance to spawn a power, 1 for music off and 2 for bricks off
51       if random_number == 1 then
52         table.insert(tiles[y],
53           Tile(x, y, TILE_ID_POWER_MUSIC_OFF, nil, true, level))
54         power_distance = 0
55       elseif random_number == 2 then
56         table.insert(tiles[y],
57           Tile(x, y, TILE_ID_POWER_BRICKS_OFF, nil, true, level))
58         power_distance = 0
59       else
60         table.insert(tiles[y],
61           Tile(x, y, tileID, nil, nil, level))
62       end
63     end
64   else
65     table.insert(tiles[y],
66       Tile(x, y, tileID, nil, nil, level))
67   end
68 end
69
70
71 -- Creates the first column in a quiasm,
72 if not platform and not chiasm then
73   -- brick size can be 2 or 4
74   brick_size = brick_sizes[math.random(1, #brick_sizes)]
75   modules = math.random(1,3)
76   -- we give the object the x and y coordinates of the start of the platform, and the brick size
77   -- and module number
78   table.insert(objects, Object((x - 1) * 16 - 64, 7 * 16, brick_size, modules))
79
80   -- number of TILES that form a quiasm (not bricks)
81   chiasm = modules * 4
82   for y = 7, height do
83     -- first tile (vertically) in the chiasm gets a block
84     if y == 7 then
85       if brick_size == 1 then
86         tileID = TILE_ID_PREBRICK1
87       elseif brick_size == 2 then

```

Imagen 13. Extracto del código del módulo LevelMaker.

> prototipo 4 ritmo y parametrización

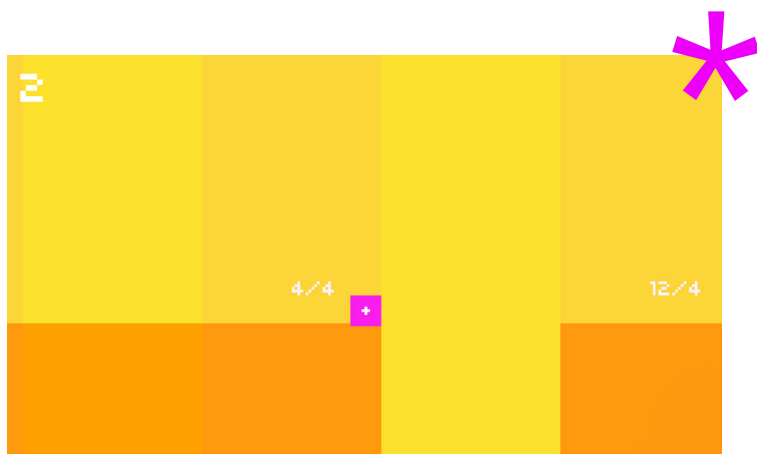


Imagen 14. Prototipo con la grilla rítmica que indica la distancia que el personaje recorre en un beat

Como ya se explicó anteriormente, en los videojuegos de ritmo se utiliza el beat de la música para guiar las interacciones a lo largo del juego. Para esto entonces es clave incorporar tempranamente en la programación la variable ritmo, ya que para que el juego funcione rítmicamente, es necesario que todos sus elementos que poseen movimiento estén sujetos a un mismo ritmo.

A partir de la estructura base ya diseñada, en el prototipo 4 se incorporan todos los aspectos necesarios para que el desarrollo del juego ocurra en base a un beat. Para lograr esto, lo que se hizo fue crear una variable global (es decir una variable que sea accesible desde cualquier parte del código del videojuego) llamada BPM (Beats Per Minute). Esta variable indica, como su nombre lo dice, los beats por minuto del nivel. En base a esta se parametrizan todos los aspectos rítmicos del videojuego: velocidad del personaje, animación del personaje (en la cual se ahondará más adelante), grilla rítmica (delimita la distancia recorrida por el personaje en el transcurso de un beat), recepción de input en base a ritmo (para que solo se acepten los inputs de aparición de plataformas al ritmo de la música) y por supuesto, el sonido del beat en sí mismo.

Gracias a este diseño parametrizado es posible modificar el ritmo de un nivel (y por tanto velocidad y dificultad) con la sola modificación de la variable BPM, lo cual resultará particularmente útil para el prototipo 7 en donde se incorporan distintos niveles de dificultad al juego.

> prototipo 5 narrativa y sprites



Imagen 15. Los referentes Celeste (Thorson y Berry, 2018) y Shovel Knight (Yacht Club Games, 2014)

Con todas las mecánicas esenciales del juego ya programadas y parametrizadas, llega el momento de empaquetar todo con una narrativa que permita comprometer al usuario con la interacción diseñada, permitiéndole crear una suerte de contrato ficticio en donde acepta todo lo ocurrido como hechos posibles en el marco del videojuego y lo asuma como un desafío real, tal y como explicaba Devlin (2011) al inicio de este documento.

Se necesita entonces de una estructura narrativa pertinente para que un personaje deba aparecer plataformas al ritmo de la música y así cruzar los vacíos dispuestos a lo largo de los niveles. En base a esto es que nace la idea de “El Sendero del Hechicero”, ya que ¿quién mejor para hacer aparecer objetos a partir de la nada que alguien que tiene la habilidad de hacer hechizos y por tanto conjurar plataformas?

La historia consiste entonces en las aventuras de un aprendiz de mago, cuyo objetivo es dominar el ritmo para recorrer de principio a fin el temido Sendero del Hechicero y así lograr convertirse en un verdadero Hechicero. En la figura se observa el storyboard de la introducción que da inicio al juego.

Para el estilo gráfico se buscó el distanciamiento de los clásicos paradigmas visuales de los juegos educativos infantiles, en donde comúnmente se usa un lenguaje que a ratos margina y sentencia a tales juegos a quedarse dentro de una caja de lugares comunes. En lugar de esto, se utilizaron como referentes juegos transversales a todas las edades, particularmente aquellos de estilo 8bit, para otorgarle un look retro, que actualmente continúa marcando tendencia en el mundo de los videojuegos independientes. Algunos

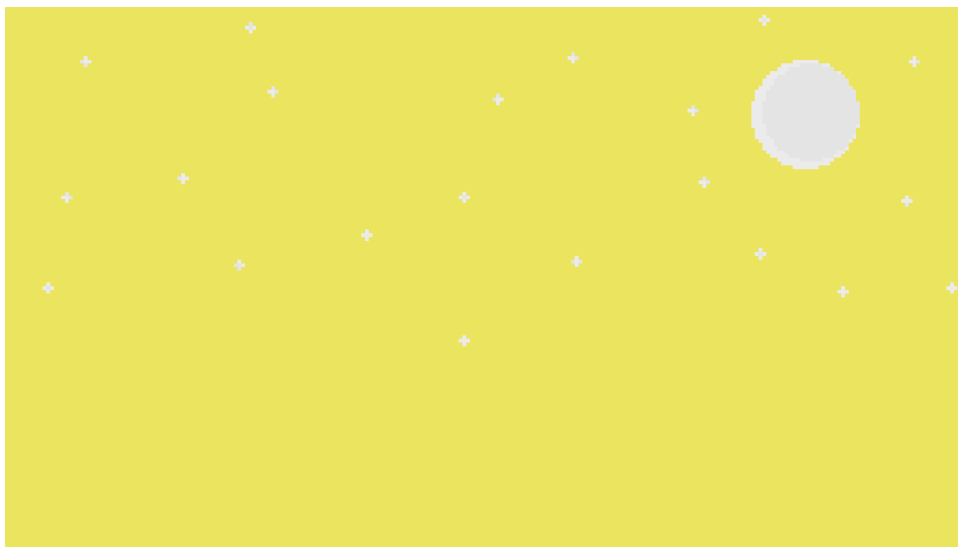


Imagen 16. Fondo 1, Nivel 1.



Imagen 17. Fondo 2, Nivel 1.



Imagen 18. Fondo 3, Nivel 1.



Imagen 19. Terreno Normal, Nivel 1.



Imagen 20. Terreno Superior, Nivel 1.

de los referentes fueron:

- > **Celeste:** un videojuego independiente de plataforma, desarrollado por los canadienses Maddy Thorson y Noel Berry, con arte del estudio Brasileño MiniBoss.
- > **Flappy bird:** videojuego para plataformas móviles producido y desarrollado por el desarrollador vietnamita Dong Nguyen, bajo su compañía dotGears, que se viralizó hace algunos años atrás.
- > **Shovel Knight:** videojuego de plataforma producido por Yacht Club Games gracias a un crowdfunding de Kickstarter.

A partir de estos referentes, y una paleta de colores acotada para emular en la medida de lo posible las limitaciones técnicas que existían durante la época en que este estilo gráfico era utilizado, se diseñaron todos los sprites necesarios para el juego. En la imagen se observa un ejemplo base de los sprites de cada uno de los 3 niveles desarrollados para este proyecto, cada nivel se compone de tan sólo 5 sprites base:

- > **Fondos 1, 2, 3:** esto para generar el efecto de parallax que se explicará en el prototipo 7.
- > **Terreno Normal:** el cual se utiliza para generar todo el terreno general del nivel.
- > **Terreno Superior:** el cual se utiliza solo en la parte de más arriba de las superficies, para darle un mejor acabado y variabilidad al diseño de niveles.

Todos estos sprites fueron diseñados utilizando la plataforma gráfica Aseprite la cual permite trabajar con gráficas 8bit y teselaciones de manera intuitiva, para con esto componer baldosas de 16x16 px que al teselarse se unan de manera orgánica, escondien-



Imagen 21. Fondo 1, Nivel 2.



Imagen 22. Fondo 2, Nivel 2.



pameIa_vilches_ivelic



Imagen 24. Terreno Normal, Nivel 2.

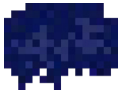


Imagen 25. Terreno Superior, Nivel 2.t

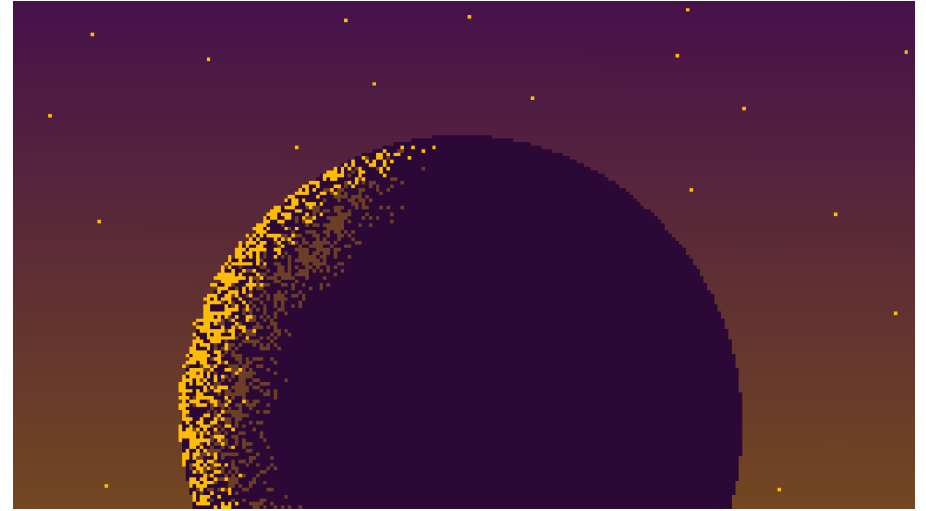


Imagen 26. Fondo 1, Nivel 3.



Imagen 27. Fondo 2, Nivel 3.

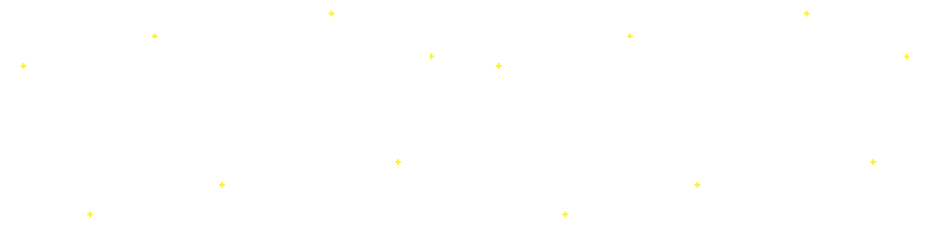


Imagen 28. Fondo 3, Nivel 3.

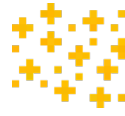


Imagen 29. Terreno Superior, Nivel 3.

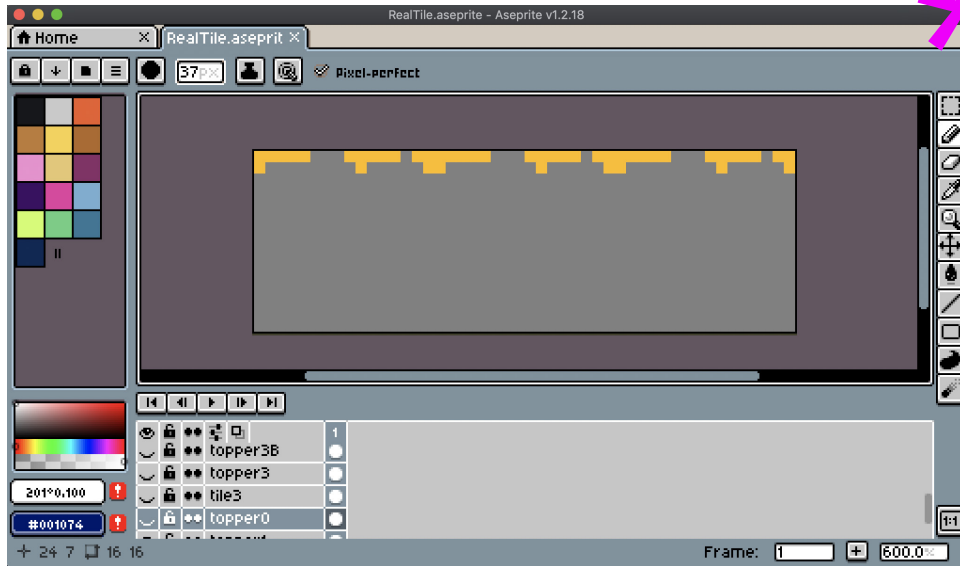


Imagen 30. Plataforma gráfica Aseprite la cual permite trabajar con gráficas 8bit y teselaciones de estas mismas de manera intuitiva.



Imagen 31. Los distintos sprites del Aprendiz de Hechicero para sus animaciones



Imagen 32. Las plataformas conjuradas en sus 3 tamaños y colores.

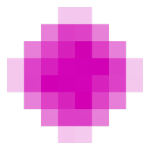


Imagen 33. Las partículas de conjuro.

do con ello la simpleza estructural de la matriz de cada nivel del juego. La gráfica de los sprites para los 3 niveles se diseñó de tal manera de generar una progresión en ascenso, en donde el primer nivel se emplaza en un desierto, para la luego pasar a un bosque en donde el camino se sitúa en la copa de árboles selváticos, para finalmente terminar en una etapa en el espacio. Además de esta sensación de ascenso para incentivar la progresión en los niveles, también se procuró que estos se distinguieran lo más posible entre sí, para que así la experiencia visual generada por cada nivel fuese dinámica e innovadora.

Junto con los sprites de cada nivel particular, se encuentran los sprites comunes a todos los niveles, estos son:

- > **El Aprendiz de Hechicero:** el protagonista de la historia, que se compone de cuatro sprites diferentes, para generar las distintas animaciones durante el juego.
- > **Las plataformas conjuradas:** son 3 distintas, una para cada denominador posible (1,2 y 4).
- > **Las partículas de conjuro:** estas servirán para animar y crear un efecto mágico cada vez que se conjure una plataforma.

Para el diseño del sprite del aprendiz de hechicero se eligió un tono magenta para que este contrastara y se destacara lo más posible de los elementos del fondo del nivel, este mismo tono se utilizó para el diseño de las 3 plataformas conjuradas las cuales sólo varían entre sí en su luminosidad para con esto generar una distinción visual entre las mismas. Las partículas de conjuro usan este mismo color, unificándose así todo lo relativo al mago con

este tono magenta.

Finalmente para el logotipo del juego se optó por un diseño completamente tipográfico, partiendo de la base de una tipografía serif, dado su aspecto antiguo que es condice con el contexto de hechicería del juego, la cual se escaló con el algoritmo de interpolación Nearest Neighbour para generar el efecto pixelado, y luego se modificó para pulir y perfeccionar los valores de línea y terminales serif. El color se eligió en base al tono magenta usado para el aprendiz de hechicero, con el objetivo de generar una identidad gráfica unificada en todo el juego, aprovechando el amarillo usado en el fondo del primer nivel para lograr un contraste cromático.



Imagen 34. Logotipo del Juego.

> prototipo 6 músicalización

Con todos los elementos anteriores ya programados e implementados, se podría decir que en este punto del desarrollo el videojuego se encuentra en un estado “jugable”. Sin embargo, hay un elemento crucial de los juegos de ritmo que debe ser implementado para realmente generar una experiencia rítmica inmersiva: la música. ¿Cuál puede llegar a ser la motivación de seguir el ritmo estático y tedioso de un metrónomo, si no tenemos de fondo una melodía que nos acompañe y nos invite a seguirlo?

Con esta idea en mente, comienza el proceso de selección de las piezas musicales que acompañarán cada nivel y comprometerán al jugador con el desarrollo del juego. Las posibilidades son infinitas, no obstante, a simple vista salta a la luz la posibilidad de utilizar alguna melodía que se integre de manera armoniosa al lenguaje gráfico utilizado, es decir una melodía 8bit.

Ahora, dentro de este género existen un sinnúmero de posibilidades, ya que cualquier canción puede potencialmente ser transformada a estilo 8 bit con la ayuda del software apropiado. Pero ¿por qué utilizar una canción o melodía cualquiera, cuando podemos aprovechar esta instancia para enriquecer la experiencia de aprendizaje de los usuarios de este juego, familiarizándolos con otros elementos de la cultura musical? A partir de esta oportunidad, se decide utilizar la música clásica como soporte musical para el juego, como lo han hecho anteriormente juegos rítmicos como Dance Dance Revolution, con la particularidad de que esta debe estar trabajada desde sonidos 8 bit.

Luego de una exhaustiva búsqueda, se seleccionan cuatro obras de música selecta que se encuentran disponibles en formato 8 bit,

cuyos atributos las hacen idóneas para los 3 niveles del juego y la introducción de la historia (mencionada en el prototipo 5):

- > **Introducción:** Summer de Antonio Vivaldi
- > **Nivel 1:** Canon in D de Johann Pachelbel
- > **Nivel 2:** Hungarian Dance No. 5 de Johannes Brahms CITAR
- > **Nivel 3:** Der Hölle Rache de Wolfgang Amadeus Mozart

Estas fueron seleccionadas específicamente de acuerdo a dos atributos esenciales: en primer lugar por su compás en 4/4 en donde la porción de tiempo queda dividida en cuatro partes, lo que permite la utilización de los 3 tipos de fracciones ya mencionados. En segundo lugar, por su progresión en ascenso en términos de tempo, lo que permite desarrollar el gameplay del videojuego de manera progresiva en dificultad, siendo el primer nivel el de menor tempo con 56.5 BPM, luego el segundo con 67.5 BPM y finalmente el tercero con 77.25 BPM. Así, para la programación simplemente se modificó la variable global BPM antes mencionada de acuerdo a cada una de las canciones, y con ello todo el nivel se adapta a la canción escogida.

Además de la música fue necesario generar efectos de sonido para acompañar, a modo de feedback, las distintas interacciones

del videojuego. Con este fin se utilizó el programa de generación de efectos de sonido para juegos de computador BFXR, el cual es completamente gratuito y ofrece múltiples parámetros y herramientas para el diseño de sonidos. Los efectos de sonido generados fueron los siguientes:

- > **Conjuros de plataformas:** estos son tres efectos de sonido distintos, uno para cada tipo de plataforma posible. Para estos se usaron sonidos que se asemejasen a una percusión, para no disrumpir la melodía principal, sino que complementarla. El tono de las tres percusiones varía, siendo el de las plataformas más pequeñas (denominador 4) el más agudo y el de las plataformas más grandes (denominador 1) el más grave.
- > **Pausa:** este efecto de sonido se agregó para entregar un feedback auditivo al usuario para cuando ingresara y saliera del estado de pausa del juego.
- > **Error:** efecto de sonido que se reproduce cada vez que el jugador comete un error al seguir las instrucciones rítmicas dadas. El rol de este es dejar claro al jugador que cometió un error, para que este entienda por qué el nivel se reinicia, y no parezca un error o bug del programa.
- > **Power Downs:** similar al efecto de Error, este sonido acom-

pañá como feedback auditivo al momento en que el jugador obtiene un potenciador negativo o Power Down (estos se explicarán con detalle en el prototipo 8).

> **Menú Principal:** efectos de sonido para acompañar los inputs captados cuando el jugador se desplaza por las opciones del menú principal.

> **Metrónomo:** este es el sonido que marca los beats de cada nivel para ayudar al jugador a identificar con mayor facilidad el ritmo de la canción.

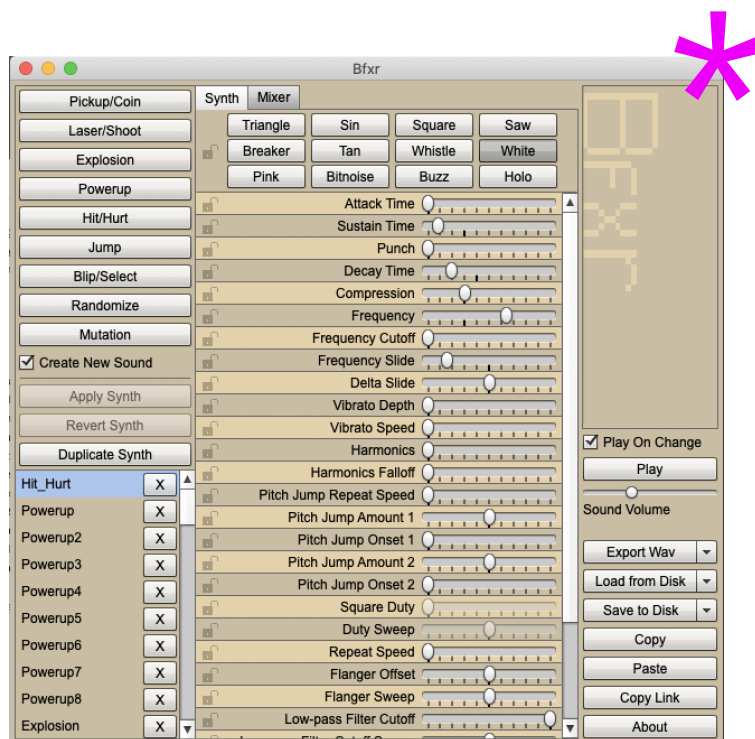
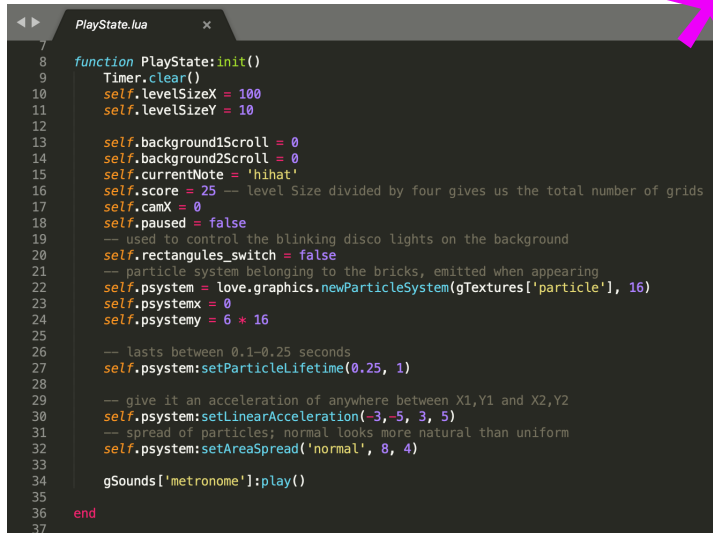


Imagen 35. Interfaz del programa de creación de sonidos para videojuegos BFXR.

> prototipo 7 parallax y animaciones



```

7
8 function PlayState:init()
9   Timer.clear()
10  self.levelSizeX = 100
11  self.levelSizeY = 10
12
13  self.background1Scroll = 0
14  self.background2Scroll = 0
15  self.currentNote = 'hihat'
16  self.score = 25 -- level Size divided by four gives us the total number of grids
17  self.camX = 0
18  self.paused = false
19  -- used to control the blinking disco lights on the background
20  self.rectangles_switch = false
21  -- particle system belonging to the bricks, emitted when appearing
22  self.psystem = love.graphics.newParticleSystem(gTextures['particle'], 16)
23  self.psystemx = 0
24  self.psystemy = 6 * 16
25
26  -- lasts between 0.1-0.25 seconds
27  self.psystem:setParticleLifetime(0.25, 1)
28
29  -- give it an acceleration of anywhere between X1,Y1 and X2,Y2
30  self.psystem:setLinearAcceleration(-3,-5, 3, 5)
31  -- spread of particles; normal looks more natural than uniform
32  self.psystem:setAreaSpread('normal', 8, 4)
33
34  gSounds['metronome']:play()
35
36  end
37

```

Imagen 36. Extracto del PlayState en donde se inicializa el sistema de partículas utilizado para la animación del conjuro.

Este nuevo Prototipo incorpora aspectos gráficos que si bien no son estrictamente necesarios para el correcto funcionamiento del juego, si son cruciales a la hora de enriquecer la experiencia del jugador. En concreto, los elementos incorporados son:

> **Parallax:** a partir de las tres capas de sprites de fondo de cada nivel, se generó un efecto parallax entre ellas y también entre el terreno del sendero mismo. Esto con el objetivo de generar un ambiente más inmersivo en cada etapa, en donde, si bien el mundo es bidimensional, las capas de parallax ayudan a generar la ilusión de profundidad y tridimensionalidad.

> **Animación del Personaje:** como se explicó anteriormente en el prototipo 5, se diseñaron 4 sprites para permitir la animación del personaje, dos frames para cuando este cae y dos frames para cuando camina. Ambos pares se repiten en loop infinito mientras el hechicero se encuentre realizando cualquiera de estas dos acciones y, como se comenzó a articular en el Prototipo 4, la velocidad en que esta repetición infinita ocurra, estará determinada por la variable global BPM para así procurar que el personaje se anime al ritmo de la música.

> **Animación de conjuro de las plataformas:** para esto se utilizó un módulo preexistente de Love 2D llamado ParticleSystem, el cual permite simular partículas que se dispersan aleatoriamente de acuerdo a ciertos parámetros previamente especificados. En términos generales, lo que se hizo fue entregarle al módulo el sprite creado de partículas, para luego, según las dimensiones de cada plataforma particular, setear el centro de generación de las partículas y el área de dispersión. Esta simulación se activa entonces cuando el jugador conjura una plataforma cualquiera al ritmo de la música, dándole un efecto de magia a la aparición de las plataformas.

> prototipo 8 niveles



Imagen 37. Nivel 1: El Desierto.

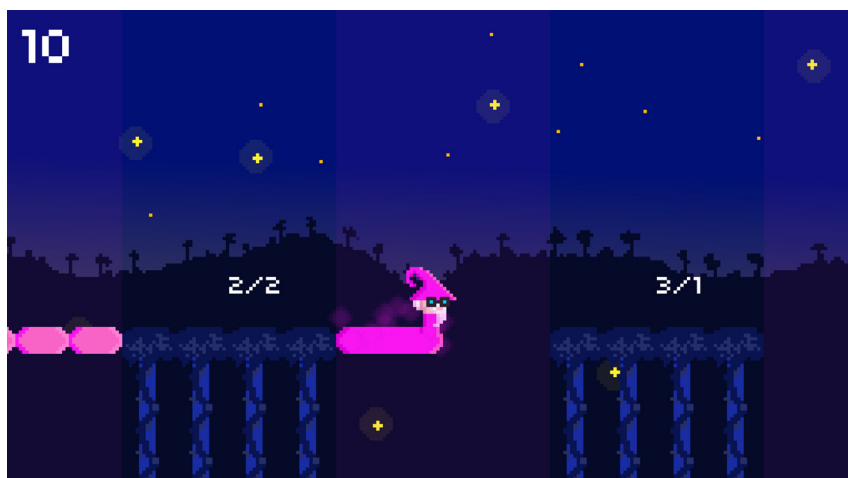


Imagen 38. Nivel 2: La Selva.

Como ya se ha insinuado desde prototipos anteriores, el juego final contiene 3 niveles de dificultad progresivamente mayor, generados procedualmente. A continuación se explican en detalle las particularidades que determinan estas diferencias de dificultad y las principales decisiones de diseño para cada nivel:

Nivel 1: El Desierto

Al ser este el primer nivel del juego, fue diseñado especialmente para hacer más fácil e introductoria la experiencia de jugador. Con este fin, en primer lugar se optó por mostrar los sprites de las plataformas vacías a conjurar, para ayudar a entender el paso de fracción a ritmo (FOTO). Además de esto, como se señaló anteriormente, los BPM de este nivel son por lejos los más bajos, para dar al jugador tiempo de pensar y habituarse a la interacción de conjurar las plataformas al ritmo de la melodía.

Nivel 2: La Selva

En este nivel ya desaparecen los sprites de las plataformas vacías como ayuda, generándose en el jugador un quiebre cognitivo en donde debe entender por sí solo las fracciones impropias que se le van presentando durante el nivel para poder conjurar las plataformas y cruzar exitosamente los vacíos. Además, los BPM aumentan considerablemente respecto al nivel anterior, comenzando a generarse una sensación de urgencia en quien juega a la hora de abrirse camino a lo largo del sendero.

Nivel 3: El Espacio

Para el último nivel del juego, los BPM están básicamente al máximo de lo que una persona promedio puede responder sin equivocarse, siendo la sensación de urgencia y adrenalina elementos

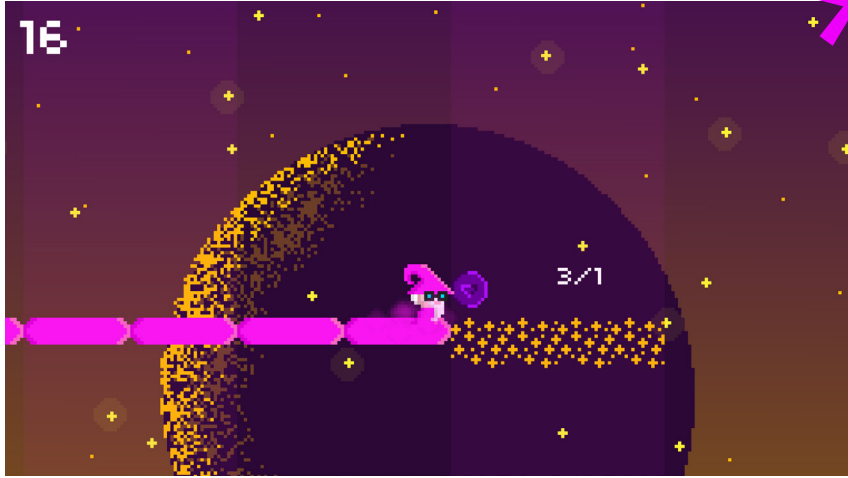


Imagen 39. Nivel 3: El Espacio. El aprendiz a punto de pasar por un Power Down.

cruciales. Pero además de este incremento en la velocidad del gameplay, se agrega un nuevo desafío al sendero: la presencia de los ya nombrados Power Downs. Estos poderes en forma de monedas de colores, se interponen en el camino del jugador, provocando efectos adversos en el nivel que dificultan la labor de recorrer el sendero al ritmo de la música. Existen dos tipos de Power Downs:

> **Silencio:** cuando el hechicero pasa por un Power Down de Silencio, la música del juego se silencia por unos segundos, quedando en el usuario la responsabilidad de mantener mentalmente el ritmo de la música para ser capaz de realizar los conjuros.

> **Desaparición de plataformas:** cuando el hechicero pasa por un Power Down de Desaparición, las plataformas que conjura el hechicero desaparecen, lo que crea la ilusión de que el mago se encuentra flotando en los vacíos, y confunde respecto del tamaño de plataforma conjurada. Queda como responsabilidad del jugador interpretar las fracciones señaladas para interpretar correctamente las indicaciones rítmicas, sin ningún tipo de apoyo visual.

> prototipo 9 testeo

A partir de el Prototipo 8, se considera el juego como completamente jugable y testeable, por lo que se procede a ajustar los parámetros el juego para poder testearlo con usuarios. Con este fin se fijan los largos de los niveles a una distancia relativamente corta (25 beats) para asegurar que en un tiempo determinado, los distintos usuarios puedan alcanzar, en la medida de lo posible, a recorrer el sendero completo. Además, se opta por no incorporar aún el tutorial, para probar distintas inducciones orales en los usuarios y constatar a partir de los resultados obtenidos, cuál es la mejor manera de guiar la comprensión del gameplay diseñado.

Con el Prototipo 9 terminado, se compiló el juego tanto para computadores Mac, como para computadores Windows para así poder testearlos virtualmente a través de videollamadas en los computadores de los usuarios seleccionados. En concreto, se testeó el juego con 5 niños de entre 8 y 12 años, de acuerdo al rango etario seleccionado y estudiado anteriormente. Además de este grupo de usuarios objetivo, se testeó en otro grupo de 10 usuarios de diversas edades, con el fin de testear la usabilidad del juego, y su atractivo e interacción más allá de su primer y principal uso como juego educativo.

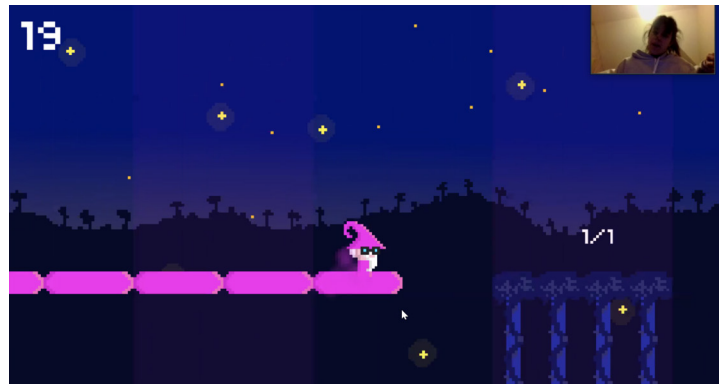
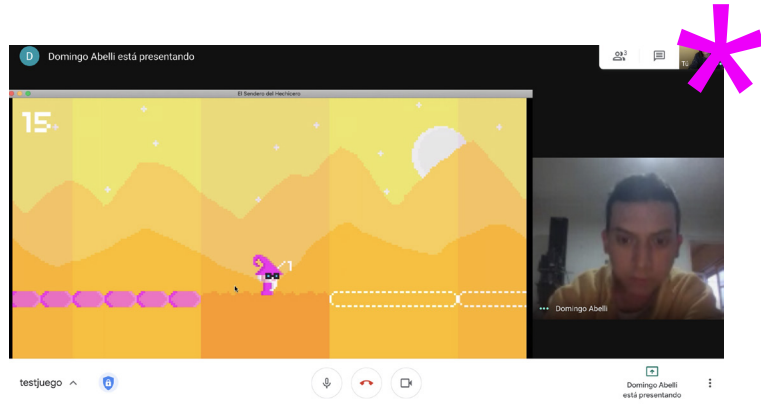


Imagen 40. Registro de los Testeos.

Testeo usuarios de entre 8 y 12 años

Este testeo tuvo como principal objetivo, dilucidar la capacidad de comprensión de los niños del rango etario objetivo, de la analogía lúdica planteada para la asimilación de las fracciones impropias y su representación como medida. Para el desarrollo del testeo se formularon a priori varias preguntas de investigación:

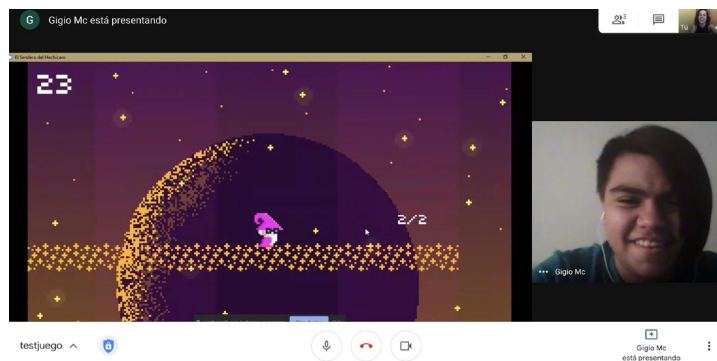
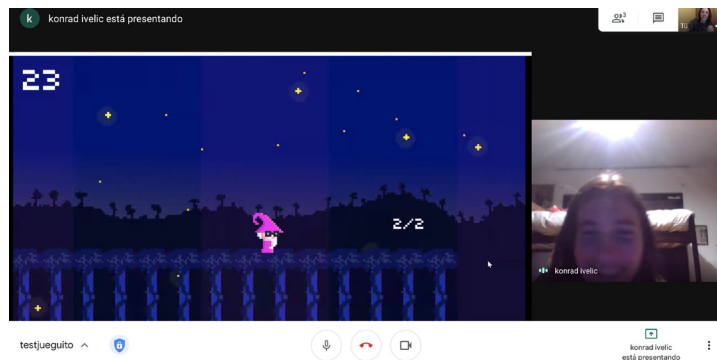
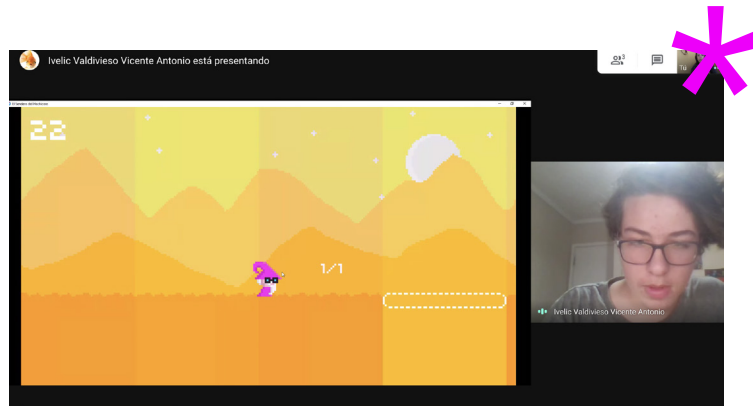


Imagen 41. Registro de los Testeos

- > ¿Cuál es la mejor forma de introducir y explicar al usuario el modo de juego propuesto?
- > ¿Podrán los niños entender y superar el desafío matemático planteado en el juego con esta analogía lúdica?
- > ¿Podrá la analogía lúdica rítmica planteada ser suficiente para superar la barrera de rechazo existente hacia los juegos educativos?
- > ¿Será el juego percibido como entretenido antes que educativo?

A partir de estas preguntas se desarrollaron sesiones individuales de testeo con cada uno de los usuarios a través de las plataformas ZOOM o Google Meet (considerando el contexto de COVID-19 y las consideraciones sanitarias del país), utilizando la función de compartir pantalla por parte de los usuarios, para así poder observar el juego en uso. Cada sesión partió con una pequeña introducción de parte de quién escribe para presentar el juego y llevar a cabo el tutorial de manera oral. Con este fin se utilizó un metrónomo para marcar el tiempo, y se demostró a partir de aplausos las distintas formas de seguir el tempo de acuerdo a las fracciones dadas. Posterior a esto se les solicitó a los usuarios que hicieran las preguntas que les surgieran tras la explicación para luego simplemente pedirles que dieran inicio al juego. Durante todas las sesiones se tomó nota de las reacciones y dificultades presentadas al jugar, y al final de cada una de ellas se les realizó una sesión de preguntas a partir de lo observado. A continuación se presentan los principales hallazgos de estas 5 sesiones de testeo.

> **Dificultades en el nivel 1:** El principal problema observado

durante el testeó tuvo lugar durante el primer nivel, ya que si bien los usuarios declaraban haber comprendido las instrucciones entregadas oralmente, se observó como solo al momento de jugar y enfrentarse al problema e interacción cara a cara, pudieron comprender e internalizar el modo de juego. Y si bien los sprites de pre-plataformas presentes en este nivel ayudan, se hace evidente la necesidad de un nivel tutorial, que más allá de explicar a partir de instrucciones el juego, pueda llevar a la práctica, de manera más sencilla la interacción planteada, para que así cuando los jugadores se enfrenten al problema real durante el nivel 1, no los tome desprevenidos y puedan extrapolar la práctica del nivel tutorial a los niveles reales del juego.

> **Paso intuitivo entre nivel 1 y 2:** resultó interesante observar que de los 5 usuarios, sólo 1 se encontró con nuevos problemas durante el paso del nivel 1 al 2, en donde la ayuda extra de las pre-plataformas desaparecen. Esto implica que la presencia de estas pre-plataformas logra cumplir su labor en el transcurso del nivel 1, siendo oportuna su eliminación para el nivel dos en donde el desafío real comienza.

> **Actitud de perseverancia por parte de los jugadores:** un aspecto muy rescatable del proceso de testeó fue la perseverancia observada en todos los jugadores. Ninguno mostró indicios o intenciones de rendirse, por mucho que el desafío pareciese difícil. Esto llegó a tal punto que cuando se les ofreció directamente si querían detenerse, todos manifestaron su intención de continuar hasta ganar, lo cual finalmente 4 de los 5 lograron hacer en la media hora que se delimitó para el proceso. El único que no logró superar los 3 niveles en el tiempo de la sesión, comunicó luego de esta que lo

siguió intentando hasta lograr ganar.

Esta perseverancia es justamente el espíritu que se persigue al momento de desarrollar un videojuego educativo, ya que como se vió al inicio, el principal atractivo de un juego en contraste con la sala de clases, es que la perseverancia es un atributo propio de los jugadores al momento de enfrentar un videojuego, algo que no ocurre en los alumnos cuando se enfrentan a un problema escrito en el contexto escolar.

> **Percepción del desafío en el ritmo por sobre las fracciones:** a partir de la observación y preguntas se constató que los jugadores percibían el desafío de los niveles en su parte rítmica y no en las fracciones, lo cual es precisamente el efecto deseado en juego de esta índole. Estos se mostraban trastornados por la idea de lograr seguir el ritmo de la música a la perfección, pese a que muchos declaraban inicialmente ser personas “sin ritmo” y olvidando el desafío matemático subyacente. Como se explicó anteriormente, la idea de desarrollar una analogía lúdica con el ritmo, es canalizar la atención del usuario hacia un fin distinto de las matemáticas mismas, para con esto hacer de la experiencia de juego algo fundamentalmente lúdico, dejando que el aprendizaje ocurra de manera tangencial al objetivo explícito del juego.

> **Elemento Sorpresa Power Downs:** los power downs incorporados en el nivel 3 lograron producir un quiebre interesante en la dificultad del juego, ya que todos los usuarios perdieron la primera vez que se toparon con uno de estos poderes, sin excepción. Este elemento sorpresa logró desestabilizar la experticia ya obtenida por los jugadores, siendo este nivel además el elegido como el

predilecto de todos los jugadores de manera unánime.

Testeo usuarios de diversas edades

Este testeo tuvo como principal objetivo probar la usabilidad del juego y el nivel de entretenimiento producido en usuarios fuera del rango etario objetivo. Como se explicó anteriormente, se espera que el juego pueda no solo entretener y ser atractivo para niños, sino que también pueda resultar una experiencia divertida para todo aquel que tenga un cierto interés por los videojuegos.

De igual manera que el testeo anterior, estas sesiones de testeo tuvieron lugar a través de las plataformas Zoom y Google Meet, con la diferencia de que este tuvo un carácter más casual que el anterior, ya que se basó en su totalidad en la observación sistemática de diversos usuarios jugando de manera orgánica el juego.

Las edades de los usuarios observados van desde los 14 a los 56 años, y a continuación se presentan los principales hallazgos levantados desde la observación:

> **El juego es percibido como desafiante:** algo que resultó muy gratificante durante estas sesiones de testeo fue constatar que, sin importar la edad, el juego era percibido como un desafío. Para ninguno de los jugadores resultó trivial lograr sortear los 3 niveles, habiendo incluso algunos que simplemente no lograron superarlos todos durante la sesión de testeo. En todos los usuarios se manifestó la misma actitud de perseverancia previamente observada en los niños del primer testeo, reintentando obstinadamente los niveles hasta lograr superarlos. Esta cualidad transversal del juego se le atribuye justamente a una de las observaciones realizadas

en el primer testeo, en donde se constató que el desafío central advertido por los usuarios fue el ritmo, por lo que en este caso, si bien todos manejaban a la perfección los contenidos matemáticos transferidos, aún así debían sortear el desafío rítmico propuesto.

> **Potencial en la cantidad de intentos por nivel:** durante todo el testeo, un aspecto que saltó a la vista fue la cantidad de veces que los participantes debieron intentar cada nivel antes de lograr superarlo por completo, y como se observó en el punto anterior, este hecho, en vez de desmotivar a los jugadores, los incitaba a intentarlo nuevamente. A partir de esto se presenta la oportunidad de implementar y agregar un contador de intentos al juego, para que así los jugadores puedan constatar y competir de acuerdo a la cantidad de intentos que les tome dominar un determinado nivel.

> **Los controles resultan intuitivos:** respecto a la usabilidad del juego, se constató que el modo de controlar al personaje mediante un solo click resultó intuitivo para todos los usuarios, lo cual deja la puerta abierta para la posterior exportación del juego a plataformas móviles con control táctil.

> **Gráfica retro llama la atención:** se recibieron numerosos comentarios positivos por parte de los jugadores respecto al lenguaje gráfico utilizado, calificándola de “atractiva”, “retro” y “original”. Esto se condice con el objetivo perseguido de alejarse visualmente de los paradigmas visuales en juegos educativos para niños, para generar un lenguaje que funcione de manera transversal a todas las edades.

> prototipo 10 tutorial y mejoras

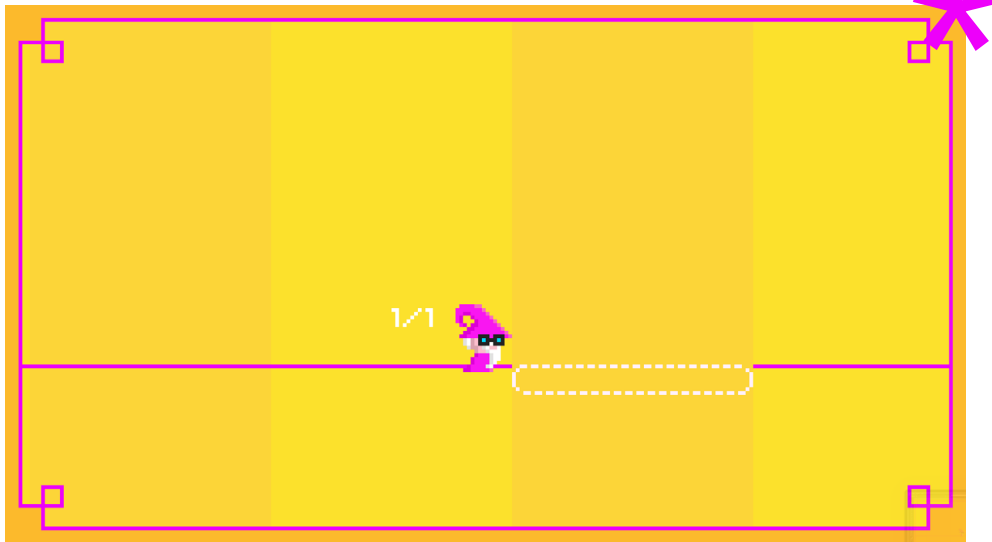


Imagen 42. Nivel Tutorial del juego.

A partir de la información levantada durante los testeos, surge en primer lugar la necesidad de implementar un nivel tutorial, que a partir de la práctica misma, permita a los usuarios familiarizarse e internalizar el modo de juego propuesto. Con este fin, se diseñaron nuevos sprites para ser usados como fondo del nivel (FOTO), los cuales tienen la particularidad de utilizar la menor cantidad de elementos posibles, para así no saturar al jugador con información y permitirle internalizar las instrucciones entregadas. Este nivel, a diferencia de los otros 3, no es generado de manera aleatoria proceduralmente, sino que es estático para así controlar exactamente el flujo de interacciones a lo largo del recorrido. Además, no tiene música de fondo sino que utiliza únicamente percusiones, para indicar a través de ellas exactamente al usuario cómo debe seguir el ritmo. A continuación se relata brevemente el flujo de interacciones del nivel tutorial:

1.

El nivel comienza con la instrucción de presionar la tecla enter para conjurar plataformas al ritmo de la música según las fracciones señaladas, y de fondo solo se escucha el beat del metrónomo marcando el tempo.

2.

El personaje avanza y las primeras fracciones con las que se encuentra son solo fracciones con denominador 1, que calzan con el sonido del beat que actúa como una guía auditiva para que el usuario sepa en qué momento debe presionar la tecla para conjurar las plataformas.

3.

Luego de esto, entra una percusión que marca la mitad de un beat, momento en el cual el personaje se encuentra únicamente con fracciones con denominador 2.

4.

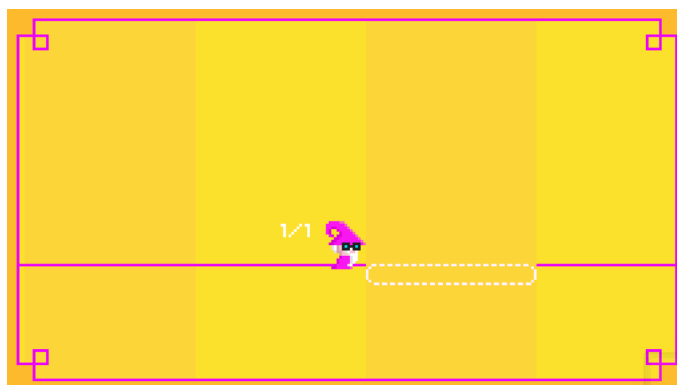
Finalmente, vuelve a ocurrir lo mismo para las fracciones con denominador 4, donde entra una percusión que marca los cuartos de beat y el personaje solo se encuentra con ese tipo de fracción.

5.

Tutorial Finalizado!

Además, se implementó un contador de intentos para cada nivel, el cual va registrando y mostrándole al jugador, la cantidad de veces que ha intentado superar el sendero sin éxito. Este se muestra al centro de la pantalla cada vez que el jugador pierde y luego durante el transcurso del sendero se mantiene posicionado en la parte superior de la pantalla a modo de contador, para que pueda ser revisado en cualquier momento.

> prototipo β



Luego de todas las iteraciones anteriores, se obtiene el prototipo Beta del Sendero del Hechicero, el cual actualmente se encuentra en un estado completamente funcional para su divulgación inicial. A continuación se presenta un storyboard de todas las partes del juego en su estado actual.

Introducción

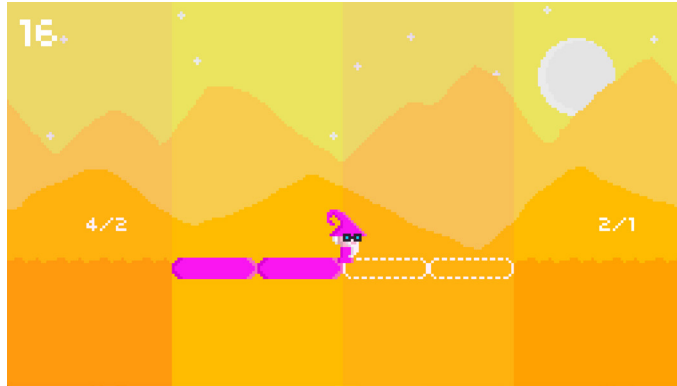
Es lo primero que aparece al iniciar el juego, aquí se presenta la historia del aprendiz de hechicero y su motivación para recorrer el sendero. La duración es acotada para no aburrir al jugador, y está construida en base a rimas de acuerdo con la narrativa de conjuros y hechicería.

Menú Principal

Una vez terminada la introducción se llega al menú principal, en donde se le ofrecen tres alternativas al jugador; puede entrar al Tutorial del juego, puede comenzar directamente a jugar los niveles, o bien puede simplemente salir.

Tutorial

De elegirse la opción "tutorial" en el menú principal, el jugador será derivado a este nivel tutorial en donde se le presentarán las instrucciones de juego llevadas a la práctica misma en un nivel más sencillo especialmente diseñado para la comprensión del gameplay.



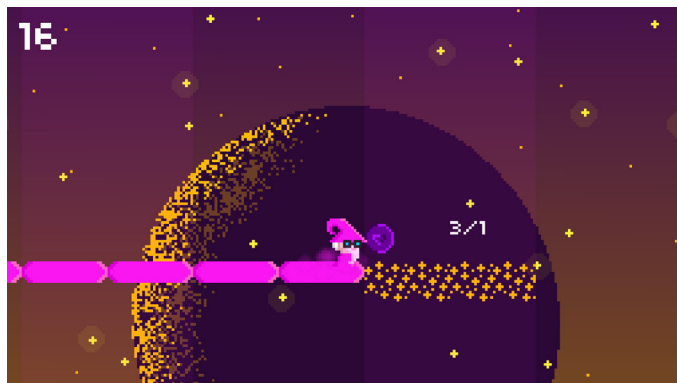
Nivel 1

De elegirse la opción “comenzar” en el menú principal, el jugador entrará en el primer nivel del juego, el cual está diseñado para ser más simple que los siguientes tanto por su menor BPM como por la presencia de pre-plataformas que ayudan al jugador a integrar la relación fracción-plataformas.



Nivel 2

Al superar el primer nivel, instantáneamente comienza el desarrollo de este segundo nivel de juego en donde los BPM aumentan y las pre-plataformas desaparecen, siendo vital la comprensión de las fracciones impropias presentadas para lograr completar el nivel.



Nivel 3

De superarse el nivel 2, comenzará de inmediato el tercer y último nivel desarrollado en este proyecto, el cual es además el más complejo de todos debido a su rápido beat y a la presencia de Power Downs que dificultan el paso por el sendero.

> 10 difusión y proyección

Paper Académico

Habiendo obtenido finalmente el Prototipo Beta luego de un largo proceso iterativo de desarrollo, se levanta la oportunidad de publicar los hallazgos respecto al aprendizaje tangencial en un paper académico en conjunto con los Profesores Alejandro Duran, diseñador y académico de la Escuela de Diseño UC y Francisco Rojas, académico de la Facultad de Matemáticas UC. La idea de esta publicación, que actualmente se encuentra en desarrollo, es poder explicar y compartir con la comunidad académica los beneficios derivados de un videojuego que transmita conocimientos científicos de manera tangencial, ya que a la fecha, no existen realmente fuentes que caractericen detalladamente este tipo de aprendizaje en el contexto de los videojuegos educativos científicos.

En concreto, se utilizará El Sendero del Hechicero como ejemplo de lo que se puede alcanzar mediante este tipo de diseño, extrapolando a partir de lo aprendido la esencia y estrategias necesarias para desarrollar un proyecto de esta índole. Para esto, además se continuará con el proceso de testeo a largo plazo, para seguir recopilando información y luces que puedan nutrir la investigación que continúa en curso, dadas las infinitas posibilidades que despierta este estilo de aprendizaje.

Difusión en entidades académicas

Se desarrolló un brochure resumen del proyecto, el cual se está difundiendo entre distintas entidades académicas, como la fundación Trabun y sus colegios asociados, para que con la progresiva vuelta a la presencialidad se puedan generar alianzas que permitan implementar el juego en el contexto de la sala de clases como complemento a las clases teóricas.

Publicación Open Source Github

Actualmente el juego se encuentra disponible con licencia Open Source en la plataforma web de hosting de software de desarrollo GitHub. En ella se subió un repositorio con todo el código que compone al videojuego y con las versiones ejecutables de la aplicación tanto para Mac como para Windows. La idea de esto es que cualquiera que lo desee pueda acceder al código del juego e incluso modificarlo y a partir de él crear nuevas instancias de juegos de aprendizaje tangencial.

Al publicar parte de la investigación en el medio web, se está expandiendo la posibilidad de que más diseñadores, programadores y distintos creadores aprendan sobre las potencialidades de este tipo de aprendizaje en videojuegos, y así puedan aplicarlas en

sus respectivos campos. Con esta expansión en mente, es que se le atribuye una licencia de Creative Commons al proyecto, la cual explicita las siguientes consideraciones al lector:

Usted es libre de: Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato.

Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente. La licenciente no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia. Bajo los siguientes términos:

Atribución — Usted debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciente. No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia" (Creative Commons, 2018).

Publicación Appstore y Google Play

Finalmente, se están compilando las versiones oficiales 1.0 del juego para ser distribuidas de manera gratuita a través de la Appstore en el caso de IOS y Google Play para Android, para así poder acercar las matemáticas de manera lúdica a la mayor cantidad de niños posible, y más allá de eso, que cualquiera que así lo desee pueda disfrutar de manera casual de una sesión de juego del Sendero del Hechicero.

>

11

conclusión

Luego de haber desarrollado este proyecto y lograr hacer realidad El Sendero del Hechicero, queda expuesta la gran potencialidad que posee el aprendizaje tangencial como herramienta para educar de manera lúdica. Fue posible constatar como, cuando un concepto determinado se contiene de manera orgánica en una analogía lúdica, es posible capturar la atención del jugador y comunicar contenidos académicos sin que estos sean percibidos como el fin último del juego.

Además fue posible, gracias a la narrativa y mundo creados, diseñar una interacción matemática que fuese más allá de los problemas de matemática simbólica que tradicionalmente son utilizados en los juegos educativos de esta índole. Lográndose generar un entorno ficticio en donde la matemática importa y tiene consecuencias reales, así como ocurría en el ejemplo señalado al inicio de este documento con los niños del Mercado de Brasil.

Otro aspecto muy interesante levantado durante el desarrollo de este proyecto es el valor de la interdisciplina, la cual en este caso particular permitió nutrir un proyecto de diseño con diversas disciplinas complementarias como son las matemáticas, música y programación. En conjunto todas estas funcionaron como catalizador de un nuevo tipo de interacción que sólo podría haber nacido de tal mezcla de conocimiento y contenidos. Esto se puede atribuir y agradecer a la metodología de diseño estratégico inculcada en la Escuela de Diseño UC, en donde todas las técnicas aprendidas permiten ser extrapoladas para luego ser aplicadas en ámbitos completamente distintos e incluso desconocidos por quién las utiliza. Esta potencialidad es la que hace del estudio de diseño una habilidad invaluable para desempeñarse en cualquier área del conocimiento.

> 12 referencias

- Behr, M.J., Harel, G., Post, T. and Lesh, R.(1993). *'Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct'*, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pp. 13–47.
- Boulet, G.: 1998, *'Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept'*, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20(4), 19–34.
- Brace Yourself Games. (2015). *Crypt of the Necrodancer* [Software computador]. Canada, Brace Yourself Games.
- Brainquake. (2016). *Wuzzit Trouble* [Software iOS]. San Francisco, Brainquake.
- Bright, G., Behr, M., Post, T., y Wachsmuth, I.(1988). *Identifying fractions on number lines*, *J. Res. Math.Educ.* 19,215–232. doi:10.2307/749066
- Buckley, P. A., & Ribordy, S. C. (1982). *Mathematics Anxiety and the Effects of Evaluative Instructions on Math Performance*. Paper presentado a Midwestern Psychological Association.
- Charalambous, C. Y., y Pitta-Pantazi, D. (2006). *Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions*. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316. doi:10.1007/s10649-006-9036-2
- Chen, B. (2019). *Are Your Children Racking Up Charges From Mobile Games? Here's How to Fight Back*. *Nueva York, The New York Times*. Recuperado de <https://www.nytimes.com/2019/02/06/technology/personaltech/children-charges-mobile-games.html>
- Common Sense. (2015). *The common sense census: media use by tweens and teens*. Estados Unidos, Common Sense Media Inc.
- Creative Commons. (2018). *Attribution 4.0 International*. Recuperado de <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>
- CS50 (2018). *Pong - Lecture 0 - CS50's Introduction to Game Development 2018*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=GfwprU0cT10>.
- Davidson, J. (1983). *Math Blaster* [Software computador]. Estados Unidos, Davidson & Associates.
- Davis, G., Hunting, R.P. y Pearn, C.: 1993, *'What might a fraction mean to a child and how would a teacher know?'*, *The Journal of Mathematical Behaviour* 12(1), 63–76.
- Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era*. New York: A K Peters/CRC Press, <https://doi.org/10.1201/b10816>
- Disney, W. (Productor) & Luske, H. (Director). (1959). *Donald in Mathmagic Land* [Película]. Estados Unidos: Walt Disney Animation.
- Ernest, P. (1986). *Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school*. *Mathematics in school*, 15(1), 2-5.
- Espinoza, L., Barbé, J., & Gálvez, G. (2011). *Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar*. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 37(1), 105-125.
- Ferrara, J. (2012). *Playful design: Creating game experiences in everyday interfaces*. Rosenfeld Media.
- Fibonacci, L. (2002). *Liber abaci. SIGLER, LE Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer.
- Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's elements of geometry*. *Euclidis Elementa*.
- Furner, J. M. (2016). *Every student can be an Einstein: Addressing math anxiety in today's classrooms*. *Transformations*, 2(2), 22-45.
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). *A componential view of children's difficulties in learning fractions*. *Frontiers in Psychology*, 4. doi:10.3389/fpsyg.2013.00715
- Gee, J. P. (2003). *What video games have to teach us about learning and literacy*. *Computers in Entertainment (CIE)*, 1(1), 20-20.
- Geist, K., & Geist, E. A. (2008). *Do Re Mi, 1-2-3: That's How Easy Math Can Be: Using Music to Support Emergent Mathematics*. *YC Young Children*, 63(2), 20.
- Gross, L. (1984). *Mathematics Can Be Fun*. *The Arithmetic Teacher*, 31(7), 38-40.
- Halfbrick Studios. (2019). *Fruit Ninja Academy: Math Master* [Software iOS]. Australia, Halfbrick Studios.
- Kallai, A., y Tzelgov, J.(2009). *A generalized fraction: an entity smaller than one on the mental number line*. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.* 35, 1845–1864. doi: 10.1037/a0016892
- Kieren, T. E. (1988). *Personal knowledge or rational numbers: It's intuitive and formal development*. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)/Erlbaum.
- Konami (1998). *Dance Dance Revolution* [Software]. Japón, Konami Holdings Corporation.

- Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico* (1era ed.). Santiago, Ministerio de Educación, República de Chile.
- Miyamoto, S. (1985). *Super Mario Bros* [Software de Computador]. Japón, Nintendo.
- NPD Group. (2011). *The video game industry is adding 2–17-year-old gamers at a rate higher than that age group's population growth*. Recuperado de https://www.npd.com/wps/portal/npd/us/news/pressreleases/pr_111011
- NPD Group. (2016). *Avid Omni Gamers Close to Surpassing Free & Mobile Gamers as the Largest Gamer Segment in the U.S.* Recuperado de <https://www.npd.com/wps/portal/npd/us/news/press-releases/2016/the-npd-group-reports-on-gamer-segmentation/>
- Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Wiley-Blackwell.
- Peña P. y Rojas F. (2014). *Resignificación del Algoritmo para Operar Aditivamente con Fracciones en un Contexto Escolar*, Unidades Didácticas en Física y Matemática.
- Pope, H., & Mangram, C. (2015). *Wuzzit trouble: The influence of a digital math game on student number sense*. *International Journal of Serious Games*, 2(4).
- Southgate, D. E., & Roscigno, V. J. (2009). *The impact of music on childhood and adolescent achievement*. *Social science quarterly*, 90(1), 4-21.
- Sylvester, J. J. (1864). *On Newton's rule for the discovery of imaginary roots*. Two papers, *Collected Mathematical Papers of JJ Sylvester*, 2, 498.
- Tahan, M. (2016). *El hombre que calculaba*. Pampia Grupo Editor.
- The World Science Festival [World Science Festival]. (2009, Junio 12). *Bobby McFerrin Demonstrates the Power of the Pentatonic Scale* [Archivo de Video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=ne6tB2KiZuk>
- Topala, R. (2013). *Geometry Dash* [Software iOS]. Suecia, RobTop Games.
- Tzur,R.(1999). *An Integrated Study Of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning*. *J. Res. Math.Educ.* 30,390–416.doi:10.2307/749707
- Yacht Club Games (2014). *Shovel Knight* [Software de Computador]. Los Angeles, California, Yacht Club Games, LLC.

